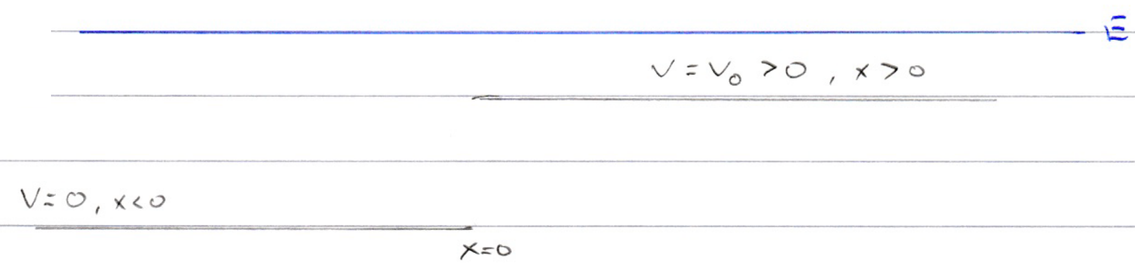
# KVANTMEKANISK POTENTIALBARRIÄR : SINGULÄR GRÄNS ?




$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + B e^{-ikx}, & x > 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \\ A e^{ik'x}, & x > 0, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar} \end{cases}$$

Sannolikhet $R$ för reflektion vid $x = 0$: $R = |B|^2$.

$\psi$ och $\partial_x \psi$ måste vara kontinuerliga vid $x = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + B = A & (\text{från } \psi(0^+) = \psi(0^-)) \\ k(1 - B) = k'A & (\text{från } \psi'(0^+) = \psi'(0^-)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A = 2k/(k + k'), \quad B = \frac{k - k'}{k + k'}$$

$$\Rightarrow \quad R = \left(\frac{k - k'}{k + k'}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E - V_0}}{\sqrt{E} + \sqrt{E + V_0}}\right)^2 \quad \text{oberoende av } \hbar\,!$$

Men $\hbar \to 0$ är en "klassisk gräns" (Bohrs korrespondens princip)

$$\lim_{\hbar \to 0} R(\hbar) \neq \underbrace{R(0)}_{\text{klassisk gräns}} = 0 \quad ?!$$

Vi kan inte utan vidare ta en "klassisk gräns" bara genom att brutalt ta $\hbar \to 0$ !

"Klassisk gräns" betyder att

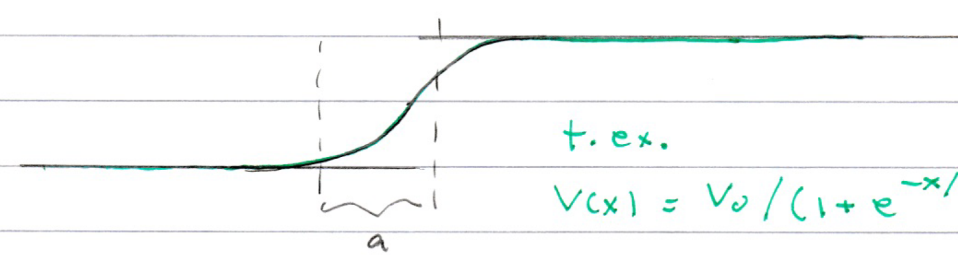
$$\lambda = \frac{\hbar}{p} << a$$

de Broglie våglängd

systemets "karakteristiska längd" (minsta längd som går att upplösa experimentellt)

dvs. kvantmekaniska interferens- och diffraktionsfenomen är utsläckta !

Vad är "a" i vårt problem? Odefinierat! Ty vi har idealiserat potentialen som en stegfunktion vid $x = 0$. En <u>realistisk</u> potential har ett kontinuerligt steg




t.ex.
$V(x) = V_0 / (1 + e^{-x/a})$, $a > 0$

Ny räkning, tekniskt litet trixigare

$$R(\hbar, a) = \left( \frac{\sinh a\pi (k - k')}{\sinh a\pi (k + k')} \right)^2$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad k' = \frac{\sqrt{2m(E - V_0)}}{\hbar}$$

Gränserna $a \to 0$ och $\hbar \to 0$ kommuterar inte!

$$\underbrace{\lim_{a \to 0} \lim_{\hbar \to 0}}_{\text{KLASSISK GRÄNS}} R(\hbar, a) = \lim_{a \to 0} R(0, a) = 0$$

$$\lim_{\hbar \to 0} \lim_{a \to 0} R(\hbar, a) = \lim_{\hbar \to 0} R(\hbar, 0) \neq 0$$

Sens moral:
Att korrekt ta gränsvärden
i fysiken kräver eftertanke!