Loggbok

Matematisk Fysik FTF131 lp 2 2017

Föreläsning 1 (1/11):
Efter en introduktion av kursens innehåll och syfte, samt en del praktisk information, startade jag upp kursens första tema: FRÅN EXPERIMENT TILL TEORI... OCH TILLBAKS IGEN. Det centrala begreppet är här Greenfunktioner och jag härledde – med hjälp av Diracnotation – hur lösningen till en inhomogen linjär diff ekv kan uttryckas med hjälp av en integral där integranden ges av den inhomogena termen multiplicerad med Grenfunktionen. Större delen av föreläsningen ägnades åt en repetition och fördjupning av Diracnotation, mycket användbar i resten av kursen liksom i kommande fysikkurser!

Föreläsning 2 (3/11):
Efter en kort repetition av onsdagens föreläsning så påminde jag genom ett konkret exempel (Poissons ekvation) hur man kan ta fram lösningen till en linjär inhomogen diff ekv genom att först bestämma dess Greenfunktion. Jag försökte sedan förmedla en fysikers sätt att tänka på en Greenfunktion som den integralkärna som kopplar samman störfält och respons i fallet då störfältet är svagt (”linjär respons”). Eftersom det i detta fall alltid finns en underliggande differentialekvation så sammanfaller fysikerns Greenfunktion med matematikerns, men perspektivskiftet tillåter vissa generaliseringar (dock ej i denna kurs). Jag gav också några exempel på linjär respons där Greenfunktionen fungerar som en responsfunktion (termodynamik, transport,...). Jag tog mig sedan an ekvationen för Greenfunktionen för en driven harmonisk oscillator och försökte lösa den med hjälp av Fourier-transformering (standardmetod!).Dock stötte vi på patrull då den inversa transformen visade sig innehålla poler på den reella axeln. Vad göra? Svar: ”komplexifiera!” (dvs. bädda in reella axeln i komplexa talplanet och angrip problemet med residykalkyl). De sista15 minuterna av min föreläsning ägnades åt en repetition av Cauchys integralformel och Cauchy-Riemanns ekvationer, och jag diskuterade kort ”borttagbara singulariteter” (triviala) och ”essentiella singulariteter” (otäcka!) För detaljer, se slides från föreläsningen.

Föreläsning 3 (8/11):
Jag fortsatte repetitionen av residykalkyl (poler, residyformeln, Jordans lemma) och ägnade sedan resten av föreläsningen till att räkna några problem som illustrerade (i) användning av Jordans lemma, (ii)

variabelsubstitution på enhetscirkeln, och (iii) integrering längs en ”smart kurva”.

Föreläsning 4 (10/11):
Jag började föreläsningen med litet teori för flervärda funktioner i komplexa talplanet, och definierade de viktiga begreppen grenpunkt och grensnitt. Jag skissade sedan lösningarna till problem 2a) och 2b) på inlämning 1 och visade hur man kan utnyttja grensnitt i residykalkyl. Detaljerna för er att gå igenom! Jag fortsatte sedan med en analys av hur man kan beräkna Cauchys principalvärde av en integral med hjälp av residykalkyl. Tyvärr blev min sista figur (för kurvan ”C_u”) felritad på tavlan och uttrycket som jag gav (korrekt) överensstämmer inte med figuren (vilket några av er misstänkte med er fråga om tecknet framför summan av residyerna i formeln!). Jag kommer att rita den korrekta figuren på onsdag 15/11! Jag är ledsen om detta satt myror i huvet på er!

Föreläsning 5 (15/11):
Jag började dagens föreläsning med en mini-repetition av vad vi gjorde sist (inkl. en korrektion av min olyckligt ritade C_u-integrationskurva!). Efter att ha introducerat Feynmans trick tog jag enkelt fram Masterformeln som relaterar principalvärdet av en integral till integraler där polerna knuffats upp/ned i det övre (undre) komplexa talplanet. Min diskussion kanske tedde sig litet pedantisk, ”varför bry sig...?!”. MEN, faktiskt, en hel massa (teoretisk) fysik görs just genom att knuffa runt poler i det komplexa talplanet!Jag härledde sedan Kramers-Kronigs relation (alias ”Hilbert transform”) och berättade (utan något försök att visa hur...) att teoremet är mycket användbart vid tillämpningar av fluktuations-dissipations-teoremet (Nyqvistrelationen, Einsteins teori för Brownsk rörelse)... Tekniskt litet trixigt, kommer på fysikkurser på Mastersnivå! Sista delen av föreläsningen ägnades en diskussion av retarderade, avancerade, och ”symmetriska” Grenfunktioner. Bara den retarderade funktionen är kausal och därmed meningsfull att använda i fysiken (även om det finns fall då det är fiffigt att formellt räkna på avancerade Grenfunktioner och sedan ”översätta/omtolka” resultatet så att det uppfyller kausalitet).

Föreläsning 6 (flyttad till 21/11):
Jag började dagens föreläsning med att ta fram Grenfunktionen för d’Alemberts ekvation, ett typexempel på hur man hanterar PDEs med Greenfunktionsteknik. Jag visade sedan hur man fixar till ett önskat randvillkor för en Greenfunktion genom att lägga till den lösning till den homogena PDEn som ger just OK randvillkor. Vi tog sedan sats för nästa delmoment av kursen: integralekvationer. Jag formulerade de fyra huvudtyperna (Fredholm och Volterra av första och andra slaget), och diskuterade kort varför integralekvationer ibland är att föredra framför

differentialekvationer (inbyggda randvillkor, naturlig formulering av det "inversa problemet" att rekonstruera en "input" från en "output" , ...). Särskilt användbara metoder i fysiken att lösa integralekvationer är att göra det algebriskt (för separabla kärnor) eller perturbativt ("Neumannserie"). Vi gick tillsammmans igenom Fredholm av andra slaget med en separabel kärna.

Föreläsning 7 (22/11):
Efter en snabbrepetition av "Fredholm av andra slaget" med en separabel kärna formulerade jag "Fredholmalternativet", kanske det mest berömda matematiska resultat som någon svensk matematiker tagit fram! Som jag berättade kom Fredholmalternativet att tjäna som en viktig inspirationskälla till Hilberts arbeten på komplexa vektorrum ("Hilbertrum", den matematiska grunden för kvantmekaniken). Jag fortsatte sedan med en genomgång av den perturbativa metoden att lösa en integralekvation ("Neumannserie") och räknade ett par exempel., inkl. Bohrapproximationen för partikelspridning (där Neumannserien trunkeras redan till första ordning). Efter rasten kastade vi oss så in i kursens andra tema: VARIATIONSKALKYL. Det arketypiska problemet här är att hitta ett lokalt extremvärde för en integral av ett uttryck som innehåller en funktion y(x), dess derivata y'(x), och ev. också den oberoende variabeln x. Vi fann att vi kan lösa problemet genom att lösa Eulers ekvation (där lösningen från Eulers ekvation, förutsatt att den är deriverbar, ger ett nödvändigt villkor för att integralen ska vara stationär).

Föreläsning 8 (24/11):
Efter att ha snabbrepeterat några formler från i onsdags gick jag igenom det kanoniska problemet med en såpbubbelfilm uppspänd över två koncentriska ringar, och passade på att upprepa varningen att i användningen av Eulers ekvation så antar man att lösningen är deriverar. I fallet med såpbubbelmodellen fallerar detta antagande vid "Goldschmidtövergången"! (Se AWH för detaljer.). Jag fortsatte sedan med att diskutera generaliseringar av Eulers ekvation till fallen med flera "beroende" (y_1, y_2,..., y_n) och "oberoende" variabler (x_1, x_2,...,x_n). Jag anbefallde försiktighet vid deriveringarna. En elementär, men ändå vanlig fallgrop vid användningen av Euler med flera oberoende variabler! Ett exempel som vi sedan räknade tillsammans visade att Laplace ekvation för en elektrostatisk potential ingenting annat är än Eulerekvationen i förklädd form! Jag fortsatte sedan föreläsningen med en diskussion av hur man använder Lagrangemultiplikatorer i min/max problem för vanliga funktioner. Generaliseringen till funktionaler ("isoperimetriska problem") är omedelbar (fler detaljer i AWH för dem av er som så önskar!). Jag skissade slutligen en historiskt intressant tillämpning: Schrödingers motivation av sin vågekvation via variationskalkyl med tvång (exemplet

hämtat från AWH, fler detaljer också där för den som så önskar!).

Föreläsning 8 (27/11):
"And now for something completely different...", en rolig timme", (litet löst) motiverat av "förskräckliga integraler (!). Jag försökte mig på en "populärvetenskaplig" introduktion till fraktaler och Hausdorff-dimensioner (mest för kul) och Lebesgueintegraler (för allmänbildning)., och de användbara "dominerade konvergens" och "Fubini teoremen".Vid fysikalisk problemlösning är vi mindre bortskämda med dylika rigorösa teorem , istället måste vi förlita oss på erfarenhet, eftertanke och god fysikalisk intuition för hur vi ska ta ett gränsvärde eller kasta om två gränsvärden. Som exempel på hur lätt man kan hamna i skenbart paradoxala resultat diskuterade jag Romeos och Julias romans i roddbåten, jfr. Problem på inlämningsomgång 2! Slides finns på länkade på kurshemsidan. Jag tog också upp ett exempel från kvantmekaniken: "klassisk" reflektion från en underkritisk potentialbarriär!

Föreläsning 9 (29/11):
Jag gjorde sedan ett avbrott från rutinerna med en slideshow på (den icke-relativistiska) kvantmekanikens fyra postulat, där jag bl.a. berättade om mätproblemet, och kort redogjorde för några av de "tankeskolor" (tolkningar av kvantmekaniken) som uppstått kring försöken att komma till rätta med problemet. Jag fick här lägga band på mig själv att inte fara iväg ut ur kursen! Fantastiskt fascinerande ämne! En utmärkt introduktion för dig som vill gå litet mer på djupet är kapitel 8 ("Conceptual issues in quantum theory") i Chris Ishams bok QUANTUM THEORY: MATHEMATICAL AND STRUCTURAL FOUNDATIONS. Wojciech Zureks text http://fy.chalmers.se/~tfkhj/Zurek.pdf rekommenderas också! Efter en kort intro till de två alternativa formuleringarna av klassisk partikel-mekanik – Hamilton vs Lagrange – så startade jag sedan upp min härledning av Feynmans formulering av ett matriselement av tidsutvecklingsoperatorn (ibland kallat "propagator") som en vägintegral. Fortsättning följer på nästa föreläsning!

Föreläsning 10 (5/12):
Jag slutförde härledningen av Feynmanpropagatorn. En finess hos Feynmans vägintegral-formulering är att den ger oss en inkörsport till att konceptualisera hur den klassiska fysiken "uppstår" ur den kvantmekaniska världen. Speciellt visade jag hur den klassiska Lagrange-mekanikens "minsta verkans princip" naturligt kan förstås som en konsekvens av Feynman!
För mer om vägintegraler för dem av er som är intresserade, se den utmärkta introduktionen av Ben Simons: http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~bds10/tp3/pi.ps Andra timmen startade jag så upp kursens sista tema: grupp- och

representationsteori. Efter en kort historisk introduktionen gick jag igenom gruppaxiomen och ett första exempel på en grupp: permutationsgruppen (som via Cayleys teorem har en särställning inom teorin för ändliga grupper!).

Föreläsning 11 (6/12):
Fortsättning av gruppteorin: Cayleys sats, några fler exempel på ändliga grupper (C_n, D_n), begreppet ekvivalensrelation, ekvivalensklass, konjugering, sidoklass, kvotmängd, kvotgrupp, Lagranges teorem.

Föreläsning 12 (8/12):
Efter en snabbrepetition av vad vi gjort hittills på gruppteoriavsnittet, gjorde jag en liten utlöpare mot topologi (3 min snabbkurs + illustration hur ekvivalensrelationer kan användas för att definiera topologiska mångfalder; se slides länkade på kurshemsidan). Andra timmen fortsatte jag sedan med en introduktion till representationsteori: motivation, definitioner, och beviset för Maschkes teorem.

Föreläsning 13 (13/12):
En snabbrepetition av vad vi gjorde sist följdes av bevis av (det historiskt viktiga!) Schurs första lemma och det fundamentala ortogonalitetsteoremet. Sedan: definition av karaktärer, med karaktärstabellen för S_3 som exempel, ortogonalitetsteoremet för karaktärer med korrolariet att # irreps = # konjugatklasser, och till sist, den viktiga ”Masterformeln” – det verktyg vi använder av oss för att analysera vilka irreps (kända, givet en specifik grupp!) som bygger upp en reducerbar rep (ofta konstruerad av ”oss” i symmetrianalysen av ett specifikt fysikproblem).

Föreläsning 14 (15/12):
Jag berättade (mycket kortfattat) om tillämpningar av ändliga grupper i fysiken (punkt- och rymdgrupper i studiet av gitterstrukturer), och tog sedan steget till en diskussion av de (för fysiken) mer fundamentala kontinuerliga grupperna: Noethers teorem, gaugesymmetrier (”interna”) och de viktiga grupperna Lorentzgruppen, Poincarégruppan och den konforma gruppen som exempel på grupper vars element utgörs av koordinattransformationer i rumtiden. Jag definierade begreppen Liegrupp och ”definierande rep” med SO(2,R) och U(1) som illustrationer, och generaliserade sedan till SO(3,R) och SU(2) och identifierade motsvarande Lie algebra. Som en tillämpning visade jag hur kvantiseringsregeln för spinn och rörelsemängdsmoment följer från den algebraiska strukturen för den gemensamma Lie algebrastrukturen för

SO(3,R) och SU(2) (vilka är symmetrigrupperna för rörelsemängdsmoment respektive spinn).