Loggbok

Matematisk Fysik FTF131 lp 2 2018

Föreläsning 1 (7/11):
Efter en introduktion till kursens innehåll och syfte, samt en del praktisk information, startade jag upp kursens första tema: FRÅN EXPERIMENT TILL TEORI... OCH TILLBAKS IGEN. Det centrala begreppet är här Greenfunktioner och jag härledde – med hjälp av Diracnotation – hur lösningen till en inhomogen linjär diff ekv kan uttryckas med hjälp av en integral där integranden ges av den inhomogena termen multiplicerad med Grenfunktionen. En stor del av föreläsningen ägnades åt en repetition och fördjupning av Diracnotation, mycket användbar i resten av kursen liksom i kommande fysikkurser! Jag exemplifierade användning av Greenfunktioner med ett konkret exempel: lösning av Poissons ekvation. Jag försökte här förmedla en fysikers sätt att tänka på en Greenfunktion som den integralkärna som kopplar samman störfält och respons i fallet då störfältet är svagt (”linjär respons”). Eftersom det i detta fall alltid finns en underliggande differentialekvation så sammanfaller fysikerns Greenfunktion med matematikerns.

Föreläsning 2 (9/11):
Efter en snabb repetition av hur Greenfunktioner kodar för linjär respons i ett experiment så tog jag mig an ekvationen för Greenfunktionen för en driven harmonisk oscillator och försökte lösa den med hjälp av Fouriertransformering (standardmetod!). Dock stötte vi på patrull då den inversa transformen visade sig innehålla poler på den reella axeln. Vad göra? En möjlighet är att ”komplexifiera!” (dvs. bädda in reella axeln i komplexa talplanet och angrip problemet med residykalkyl). Problemet här är att det finns olika sätta att göra detta på, med olika resultat! För att förstå vilket sätt som är det ”rätta” behöver vi använda resultat från residykalkyl. Resten av min föreläsning ägnades därför åt en repetition av residykalkylens grunder, inkl. Cauchys integralformel, residysatsen, Jordans lemma, etc., och räkning av ett par exempel, (i) variabel-substitution på enhetscirkeln, och (ii) integrering längs en ”smart kurva”.

Föreläsning 3 (14/11):
Jag började föreläsningen med litet teori för flervärda funktioner i komplexa talplanet, och definierade de viktiga begreppen grenpunkt och grensnitt och visade hur man kan använda grensnitt för att klistra ihop Riemannblad till Riemannytor. Jag skissade sedan lösningarna till två av

problemen på inlämning 1 och illustrerade med dessa hur man kan utnyttja grensnitt i residykalkyl. Detaljerna för er att gå igenom! Jag fortsatte med en analys av hur man kan beräkna Cauchys principalvärde av en integral med hjälp av residykalkyl. Obs! Beteckningarna "C_u" och "C_ö" i de bilder jag ritade på tavlan refererar endast till den integrationskurva längs reella axeln där polen (på reella axeln) undvikes genom att gå en liten infinitesimal omväg i undre respektive övre halvplanet. Jag var här otydlig och kan ha påstått också något om hur Jordankurvan ska läggas i de två fallen. Dock: hur Jordankurvan läggs bestäms av hur integranden ser ut!

Föreläsning 4 (16/11):
Jag började dagens föreläsning med en mini-repetition av vad vi gjorde sist. Efter att ha introducerat Feynmans trick tog jag enkelt fram (det som ibland litet pretentiöst kallas) "Masterformeln" (i fysiktillämpningar av Greenfunktioner). Formeln relaterar principalvärdet av en integral till integraler där polerna knuffats upp/ned i det övre (undre) komplexa talplanet. Min diskussion kanske tedde sig litet pedantisk, "varför bry sig...?!". MEN, faktiskt, en hel massa (teoretisk) fysik görs just genom att knuffa runt poler i det komplexa talplanet! Jag härledde sedan Kramers-Kronigs relation (alias "Hilbert transform") och berättade (utan något försök att visa hur...) att teoremet är mycket användbart vid tillämpningar av det så kallade fluktuations-dissipations-teoremet (Einsteins teori för Brownsk rörelse, Nyqvistrelationen). Tekniskt litet trixigt, kommer på fysikkurser på Mastersnivå! Sista delen av föreläsningen ägnades en diskussion av retarderade, avancerade, och "symmetriska" Grenfunktioner. Bara den retarderade funktionen är kausal och därmed meningsfull att använda i fysiken (även om det finns fall då det är fiffigt att formellt räkna på avancerade Grenfunktioner och sedan "översätta/omtolka" resultatet så att det uppfyller kausalitet).

Föreläsning 5 (21/11):
Jag tog sats för nästa delmoment av kursen – integralekvationer – genom att berätta att diffekvationer (som är det som matematiskt bygger upp fysiken) kan skrivas om som integralekvationer och visade med ett exempel hur man går tillväga. Som ett allmänbildande inslag listade jag de viktigaste diffekvationerna i klassisk fysik och kvantfysik. Jag formulerade sedan de fyra huvudtyperna (Fredholm och Volterra av första och andra slaget), och diskuterade kort varför integralekvationer ibland är att föredra framför diffekvationer (inbyggda randvillkor, naturlig formulering av det "inversa problemet" att rekonstruera en "input" från en "output" , ...). Särskilt användbara metoder i fysiken att lösa integralekvationer är att göra det algebraiskt (för separabla kärnor) eller perturbativt ("Neumannserie"). Vi gick tillsammmans igenom en Fredholmekvation av andra slaget med en separabel kärna och jag visade

hur man kan lösa den med en Neumannserie (och överlät på er att testa lösningen med användning av den algebraiska metoden). Jag formulerade också om det ”Fredholmalternativet” och uppmanade er alla att tänka igenom analogin med ett resultat ni känner väl till från kursen i linjär algebra! ”Fredholmalternativet” är kanske det mest berömda resultat som någon svensk matematiker tagit fram! Som jag berättade kom Fredholmalternativet att tjäna som en viktig inspirationskälla till Hilberts arbeten på fullständiga normerade vektorrum (med inre produkt som norm = ”Hilbertrum”), den matematiska grunden för kvantmekaniken.

Föreläsning 6 (23/11):
Bornapproximationen för partikelspridning i kvantmekaniken är ett paradexempel där både en Greenfunktion och en integralekvation förekommer. Jag visade hur man ställer upp problemet och löser det (till första ordningen i en Neumannserie = ”Bornapproaximationen”!). Vi kastade oss sedan raskt in i kursens andra tema: VARIATIONSKALKYL. Det arketypiska problemet här är att hitta ett lokalt extremvärde för en integral av ett uttryck som innehåller en funktion y(x), dess derivata y'(x), och ev. också den oberoende variabeln x. Vi fann att ett nödvändigt villkor för en lösning är att funktionerna y och y' uppfyller Eulers ekvation. Jag gick sedan igenom det kanoniska exemplet med en såpbubblefilm uppspänd över två koncentriska ringar: Hur bestämma den yta som spänns upp av såpbubblelösningen? Jag utfärdade en VARNING att det som här såg så enkelt och trivialt ut (när man väl fått kläm på formalismen) innehåller en fallgrop. Mer om detta onsdag nästa vecka!

Föreläsning 7 (28/11):
Efter att ha snabbrepeterat några formler från i fredags gick jag tillbaks till såpbubbleproblemet och belyste varför försiktighet alltid måste anbefallas för att man ska vara säker på att ha identifierat en korrekt lösning (se AWH för detaljer.). Jag fortsatte sedan med att diskutera generaliseringar av Eulers ekvation till fallen med flera ”beroende” (y_1, y_2,..., y_n) och ”oberoende” variabler (x_1, x_2,...,x_n). Ett exempel som vi sedan räknade tillsammans visade att Laplace ekvation för en elektrostatisk potential ingenting annat är än Eulerekvationen i förklädd form! Faktiskt, flera av fysikens viktiga ekvationer kan återföras på Eulerekvationen! Jag fortsatte sedan föreläsningen med en diskussion av hur man använder Lagrangemultiplikatorer i min/max problem för vanliga funktioner. Generaliseringen till funktionaler (“isoperimetriska problem”) är omedelbar (fler detaljer i AWH för dem av er som så önskar!). Jag skissade slutligen en historiskt intressant tillämpning: Schrödingers härledning av sin vågekvation via variationskalkyl med tvång (exemplet hämtat från AWH, fler detaljer också där för den som så önskar!).

Föreläsning 8 (30/11):
”Och nu till något helt annat...”, en rolig timme”, litet löst motiverat av “förskräckliga integraler.... Jag försökte mig på en populärvetenskaplig introduktion till fraktaler och Hausdorff-dimensioner (mest för kul) och Lebesgueintegraler (för allmänbildning), och de användbara ”dominerade konvergens” och ”Fubini teoremen”. Vid fysikalisk problemlösning är vi mindre bortskämda med dylika rigorösa teorem , istället måste vi förlita oss på erfarenhet, eftertanke och god fysikalisk intuition för hur vi ska ta ett gränsvärde eller kasta om två gränsvärden. Som exempel på hur lätt man kan hamna i skenbart paradoxala resultat diskuterade jag Romeos och Julias romans i roddbåten. Jag tog också upp ett exempel från kvantmekaniken: ”klassisk” reflektion från en underkritisk potentialbarriär. Min analys tycktes leda till paradoxen att också klassiska partiklar kan reflekteras vid ett (godtyckligt litet!) potentialsteg (via Bohrs ”komplementaritetsprincip”). Ni kommer i en inlämningsuppgift att få chansen att gå litet mer på djupet med dessa två (skenbart?) märkliga resultat!

Föreläsning 9 (3/12):
Jag inledde den tidiga måndagsföreläsningen med en slideshow på (den icke-relativistiska) kvantmekanikens fyra postulat (inom ramen för kanonisk operator formalism, den första formuleringen av kvantmekanik och den som ni är bekanta med från kvantmek kurserna). Jag berättade bl.a. om mätproblemet och redogjorde kort för några av de ”tankeskolor” (tolkningar av kvantmekaniken) som uppstått kring försöken att komma till rätta med problemet. Jag fick här lägga band på mig själv att inte fara iväg ut ur kursen! Fantastiskt fascinerande ämne! En utmärkt introduktion för dig som vill gå litet mer på djupet är kapitel 8 (”Conceptual issues in quantum theory”) i Chris Ishams bok QUANTUM THEORY: MATHEMATICAL AND STRUCTURAL FOUNDATIONS. Wojciech Zureks text http://fy.chalmers.se/~tfkhj/Zurek.pdf rekommenderas också (överkurs). Jag startade sedan upp min härledning av Feynmans representation av ett matriselement av tidsutvecklingsoperatorn som en vägintegral, det fundament som bär upp VÄGINTEGRALFORMULERINGEN AV KVANTMEKANIK. Fortsättning följer nästa föreläsning...

Föreläsning 10 (5/12):
Jag slutförde härledningen av Feynmans vägintegral. En finess här är att vägintegralformuleringen ger oss en inkörsport till att konceptualisera hur den klassiska fysiken ”uppstår” ur den kvantmekaniska världen. Speciellt visade jag hur den klassiska analytiska mekanikens ”minsta verkans princip” naturligt kan förstås som en konsekvens av Feynman! För mer om vägintegraler för dem av er som är intresserade, se den utmärkta introduktionen av Ben Simons: http://www.tcm.phy.cam.ac.uk/~bds10/tp3/pi.ps
Andra timmen startade jag så upp kursens tredje tema: grupp- och

representationsteori. Efter en kort historisk introduktion gick jag igenom gruppaxiomen och illustrerade sedan med ett par exempel begreppet SYMMETRIGRUPP (den typ av grupp som vi som fysiker primärt är intresserad av). Fortsättning följer nästa vecka...

Föreläsning 11 (11/12):
Efter en kort repetition av vad vi gjorde sist gav jag ett första (och superviktigt!) exempel på en grupp: permutationsgruppen, vilken via Cayleys teorem har en särställning inom teorin för ändliga grupper!. Jag fortsatte så med några fler exempel på ändliga grupper (C_n, D_n), och disku sedan begreppen ekvivalensrelation, ekvivalensklass, konjugering, sidoklass, kvotmängd, kvotgrupp, och Lagranges teorem. Jag gav också en motivation (kvantmekanik!) till vårt nästa ämne: representationsteori.

Föreläsning 12 (12/12):
Jag spann vidare på min motivation från igår genom att visa hur en transformation i koordinatrummet inducerar en transformation i Hilbertrummet (illustrerat med en rotation av en p2-orbital av väteatomen). Efter att ha definierat vad en grupprepresentation är och hur den kan sönderläggas i mindre irreducibla reps (om den inte själv råkar var en irrep!) så diskuterade jag så de viktiga Maschkes teorem, Schurs två lemmor, och det fundamentala ortogonalitetsteoremet (med utförligt bevis av det senare).

Föreläsning 13 (14/12):
Vi tittade på några konsekvenser av det fundamentala ortogonalitetsteoremet, och jag definierade och exemplifierade sedan begreppen "karaktär" och "karaktärstabell" (mycket användbara!). Efter att ha tagit fram den s.k. "Masterformeln" (som ger ett verktyg att bryta ned givna reps i irreps (och på det sättet få koll på de fundamentala frihetsgraderna i en fysiktillämpning) så tog jag ett kliv till de kontinuerliga grupperna. Jag definierade begreppen Liegrupp och "definierande rep", med SO(2,R) och U(1) som illustrationer.

Föreläsning 14 (19/12):
Efter en snabbrepetition av vad vi gjorde sist så generaliserade jag min diskussion av SO(2,R) och U(1) till SO(3,R) och SU(2) (rotationsgrupperna i 3D med reellvärd resp. komplex definierande rep). Efter att ha identifierat Lie algebran för dessa grupper (en och samma algebra!) så skissade jag argumentet varför ändå inte är isomorfa. En rotation ett helt varv i SU(2) ger oss inte tillbaks vad vi startade med utan istället ploppar det upp ett minustecken, fysikens kanske viktigaste minustecken! SO(3,R)

är isomorf med kvotgruppen SU(2)/Z_2! Jag avslutade dagens föreläsning med att skissa hur man kan analysera tillstånd byggda av tre kvarkar genom användning av repteori, särskilt Masterformeln. Konstruktionen kallas Clebsch-Gordansönderläggning (en sönderläggning av en direkt produktrep i en direkt summa av irreps, något ni faktiskt redan gjort i kvanten när ni analyserade hur det totala spinnet för två spinn-1/2 partiklar bryts ned i en triplett (spinn1) och en singlett (spinn 0)!).

Några av er har frågat om någon lämplig bok i grupp- och representationsteori för framtida studier. Jag kan rekommendera A. Zee, Group Theory in a Nutshell for Physicists (Princeton University Press, 2016). De två första kapitlen behandlar de ämnen vi diskuterat i kursen (men mer detaljerat och med fler exempel och illustrationer).

Föreläsning 15 (19/12):
Så till något helt annat! Eftermiddagens föreläsning ägnades en populärvetenskaplig diskussion om topologisk kvantmateria, se kurshemsidan för mina slides!

Föreläsning 16 (21/12):
Kursens sista föreläsning: En 90 min introduktion till några av topologins grundbegrepp. Se mina inscannade föreläsningsanteckningar på kurshemsidan, länkade under ”ABC i topologi”.

För dem av er som är nyfikna att lära er litet mer om topologi så kan jag rekommendera en underbar bok: D. S. Richeson, Euler’s Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology (Princeton University Press, 2008). Standardtexten bland fysiker (mer avancerad) är M. Nakahara, Geometry, Topology, and Physics (Taylor and Francis, 2003). Innehåller allt i ämnet en blivande teoretisk fysiker kan behöva!