

Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen 16 december 2013

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.

Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

1. Beskriv hur man kan använda residykalkyl för att beräkna integralen

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2}},$$

där a är en positiv reell konstant. Beräkna I .

2. Betrakta integralekvationen

$$\varphi(x) = x + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt$$

med den separabla kärnan $K(x,t) = xt$. Vilket är villkoret på λ för att Neumannserien som löser ekvationen ska konvergera? Antag att Du istället löser ekvationen exakt. Behövs det då något villkor på λ ? Diskutera!

3. a) Rummet av kvadrat-integrerbara funktioner brukar betecknas $\mathcal{L}_w^2(a,b)$. Vad är w ? Vad är a och b ? Varför är $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ intressant för en fysiker?

b) Enligt *Stone-Weierstrass teoremet* kan man spänna upp $\mathcal{L}_w^2(a,b)$ med en bas av ortogonala polynom. Illustrera detta genom att ta fram de tre första polynomen T_0, T_1, T_2 för $w = 1/\sqrt{1-x^2}$, $-a = b = 1$, och med "standardiseringen" $T_n(1) = 1, n = 0, 1, 2, \dots$ (T_0, T_1 , och T_2 utgör de tre första *Chebyshevpolyomen*, mycket användbara i analys av mätdata.)

Ledning: $\int \cos^2 \theta d\theta = \theta/2 + (1/4) \sin 2\theta + C$, $\int \cos^3 \theta d\theta = \sin \theta - (1/3) \sin^3 \theta + C$

4. Betrakta en kedja upphängd i två punkter på samma höjd. Beskriv hur Du kan bestämma kedjans form med hjälp av variationskalkyl. (Du behöver inte utföra räkningarna.)

5. Konjugatklasserna till permutationsgruppen S_n bestäms av strukturerna på cyklerna som representerar gruppelmenten. T.ex., $(12)(3)(4)$ och $(14)(2)(3)$ i S_4 tillhör samma konjugatklass, medan (1234) och (1342) tillhör en annan konjugatklass.

a) Hur många konjugatklasser har S_4 ?

b) Antalet inekvivalenta irreps till en grupp är lika med antalet konjugatklasser. Använd detta resultat och Ditt svar i a) till att visa att S_4 har åtminstone en irrep av dimensionen ≥ 3 .