Tentamen i Matematisk fysik FTF131

Måndagen den 9 januari 2017

Examinator: Henrik Johannesson, tel. 0768-237042.
Inga hjälpmedel är tillåtna på denna tentamen.
Resultat meddelas individuellt via e-post.

Tentamen består av fem uppgifter där varje uppgift ger maximalt 5 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad.

Strukturera Dina lösningar noggrant. **Uppställda samband skall motiveras**, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

---

1. (a) Residykalkyl är ett effektivt redskap vid beräkningen av Greenfunktioner. Vad är en Greenfunktion? Varför är Greenfunktioner så viktiga i fysiken? Och hur kommer egentligen residykalkylen in i beräkningen av Greenfunktioner? Svara kortfattat med så få formler som möjligt. Använd ord och skisser!

(b) Använd residykalkyl till att visa att stegfunktionen $\theta(x)$ har integralrepresentationen

$$\theta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t - i\epsilon} dt\,, \quad \epsilon > 0.$$

2. (a) Ett centralt teorem i teorin för integralekvationer är det så kallade *Fredholmalternativet*. Det kom att spela en viktig roll då David Hilbert, i arbetet med att konstruera ett fullständigt bevis för teoremet, leddes till att utveckla teorin för Hilbertrum $-$ den matematiska grundvalen för kvantmekaniken. Ge en formulering av Fredholmalternativet!

(b) Betrakta integralekvationen

$$u(x) - \lambda \int_0^1 (1 + xt)u(t)dt = x$$

Antag att $\lambda = 1$. Vilket av de två Fredholmalternativen gäller då?

3. Schrödingers ursprungliga härledning av den tidsoberoende Schrödingerekvationen bygger på variationskalkyl. Hur? Skissa de väsentliga stegen i härledningen! En viktig komponent är att Lagrangemultiplikatorn kan tolkas som en energi. Vad är en *Lagrangemultiplikator*? Och hur kommer den in i Schrödingers härledning?

4. Rummet $\mathcal{L}^2_w(\mathbb{R})$ av funktioner definierade på $\mathbb{R}$ med ändlig inre produkt

$$\langle f|g\rangle \equiv \int_{\mathbb{R}} f^*(x)g(x)w(x)dx$$

med viktfunktion $w(x) = e^{-x^2}$ är ett Hilbertrum. Den ortogonala basen i detta Hilbertrum ges av *Hermitepolynomen*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Verifiera detta påstående för de tre första Hermitepolynomen.

5. (a) Betrakta permutationsgruppen S_3 med en tre-dimensionell representation D där tre av elementen i S_3 representeras av

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vilka är de övriga representationsmatriserna i D?

(b) Bestäm karaktärerna för representationsmatriserna i D. Hur kan du använda ditt resultat till att fastställa hur många irreducibla representationer som finns i D? Varför är denna typ av frågeställning (tillämpad på mer komplexa grupper!) intressant för en fysiker? Diskutera!