Inlämningsuppgifter kursvecka 1
Matematisk fysik FTF131, lp 2 2018

Deadline: Fredag 23 november

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! Efter kursens slut kan Du komma att kallas till ett individuellt eftersamtal där Du får redogöra för hur Du löst några av inlämningsuppgifterna.

---

1. a) (3p) På en av föreläsningarna beräknade jag integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

genom att integrera längs en "smart kurva" i det komplexa talplanet. Integralen kan också ganska enkelt beräknas genom att införa en flervärd hjälpfunktion, $\ln(z)$, och sedan integrera längs ett grensnitt. Visa hur!

b) (3p) På en annan föreläsning skissade jag hur man kan beräkna integralen

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$$

med hjälp av ett grensnitt. Utför beräkningen i detalj!

2. (8p) I ett tresidigt appendix i boken *Statistical Physics* av F. Mandl beräknas integralen

$$I = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx.$$

Mandl skriver: "The integral can be evaluated by contour integration. We shall give a more elementary derivation, purely formal without rigorous justification." Visa hur integralen kan beräknas med residykalkyl! Kolla att Ditt svar överenstämmer med Mandls, $I = \pi^4/15$.

Ledning: Undersök först integralen $\oint \frac{z^4}{e^z-1} dz$ på den kurva i det komplexa talplanet som bildar en rektangel med två av hörnen i $z = R \pm 2\pi i$, och med de två andra hörnen avrundade så att de nätt och jämnt nuddar punkterna $z = \pm 2\pi i$. Använd symmetri-egenskaper hos integranden. Tag gränsen $R \to \infty$. Relatera till integralen I i uppgiften!

3. (2p) Använd Kramers-Kronig relationerna till att visa att

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

4. a) (5p) Use residue calculus to determine the Green's function $G(t, t')$ for the damped harmonic oscillator, satisfying

$$(m\frac{d^2}{dt^2} + 2mQ^{-1}\omega\frac{d}{dt} + m\omega^2)G(t, t') = \delta(t - t') \tag{1}$$

in the overdamped ($Q < 1$) and underdamped ($Q > 1$) cases.

b) (2p) Using the Green's function $G(t, t')$ derived in a), write a closed expression for the solution of the driven oscillator with driving force $F(t)$, and show that the solution at time t only depends on the driving force at earlier times.

c) (5p) Consider now a modified oscillator with an additional term $m\tau\frac{d^3}{dt^3}x(t)$, and show that such a term is not compatible with causality for $Q \to \infty$. A model of this type was put forth by Abraham and Lorenz in 1903 to describe the energy loss of an accelerating charge due to radiation; the model predicts that the acceleration of a charge at time t depends on the electric field not only at times before t but also up to time $\tau \approx 10^{-23}s$ *after* t, i.e. the particle anticipates that soon a field will be turned on! The resolution of the problem was provided by quantum mechanics.