Inlämningsuppgifter kursvecka 1
Matematisk fysik FTF131, lp 2 2021

Deadline: Fredagen 19 november

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Du får gärna arbeta tillsammans med din kurskamrater, men de lösningar som du lämnar in måste du ta ansvar för själv! På muntan i januari kommer du att få redogöra för hur Du löst en av inlämningsuppgifterna.

---

1. a) (3p) På en av förelsningarna (se Nov5(III).m4v, länkad på kurshemsidan) beräknade jag integralen

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$$

genom att integrera längs en "smart kurva" i det komplexa talplanet. Integralen kan också ganska enkelt beräknas genom att införa en flervärd hjälpfunktion, $\ln(z)$, och sedan integrera längs ett grensnitt. Visa hur!

b) (3p) På en annan föreläsning (se Nov10(II).m4v) skissade jag hur man kan beräkna integralen

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$$

med hjälp av ett grensnitt. Utför beräkningen i detalj!

2. (4p) Använd Kramers-Kronig relationerna till att visa att

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. (4p) Schrödingerekvationen för en fri partikel i en dimension med massan m och vågfunktionen $\psi(x,t)$ kan skrivas $L_{x,t}\,\psi(x,t) = 0$ där

$$L_{x,t} \equiv \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

är *Schrödingeroperatorn*. Bestäm den retarderade Greenfunktionen

$$G(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{ikx} G(k,t) dk$$

till Schrödingeroperatorn. (Du behöver inte utföra integrationen över k.)

4. a) (4p) Find the Green's function $G(t,t')$ for the damped harmonic oscillator, satisfying

$$(m\frac{d^2}{dt^2} + 2mQ^{-1}\omega\frac{d}{dt} + m\omega^2)G(t,t') = \delta(t-t') \qquad (1)$$

in the overdamped ($Q < 1$) and underdamped ($Q > 1$) cases.

b) (2p) Using the Green's function $G(t,t')$ derived in a), write a closed expression for the solution of the driven oscillator with driving force $F(t)$, and show that the solution at time t only depends on the driving force at earlier times.

c) (5p) Consider now a modified oscillator with an additional term $m\tau\frac{d^3}{dt^3}x(t)$, and show that such a term is not compatible with causality for $Q \to \infty$. A model of this type was put forth by Abraham and Lorenz in 1903 to describe the energy loss of an accelerating charge due to radiation; the model predicts that the acceleration of a charge at time t depends on the electric field not only at times before t but also up to time $\tau \approx 10^{-23}s$ *after* t, i.e. the particle anticipates that soon a field will be turned on! The resolution of the problem was provided by quantum mechanics.