

Inlämningsuppgifter kursvecka 3

Matematisk fysik FTF131, lp 2 2020

Deadline: Fredagen 4 december

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! Efter kursens slut kan Du komma att kallas till ett individuellt eftersamtal där Du får redogöra för hur Du löst några av inlämningsuppgifterna.

1. Erwin Schrödinger, before settling for the nonrelativistic Schrödinger equation, and later Oskar Klein¹ and Walter Gordon attempted to build relativistic quantum mechanics from the squared energy relation $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ by using the standard operator replacements for E and \mathbf{p} . This led them to the *Klein-Gordon equation*

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi,$$

where ϕ is a *quantum field*, which, with an appropriate interpretation, describes spinless elementary particles of mass m . The Higgs boson, predicted by the standard model and discovered experimentally at CERN in 2012, is an important example.

a) (4p) Show that the Green's function can be expressed as

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk \frac{2k \sin(kr)}{r} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{\exp(-i\omega t)}{-\omega^2 + k^2 + m^2}.$$

b) (3p) Given a), determine the retarded and advanced Green's functions of the Klein-Gordon equation. (You don't have to evaluate the spatial part of the integral representation of $G(\mathbf{r}, t)$ in a).)

c) (4p) It is possible to define a very different Green's function by pushing *one* pole of its Fourier transform into the upper half plane, with the other one being pushed into the lower half plane. The Fourier transformed Green's function thus obtained is called a *Feynman propagator*². It has one distinctive feature that sets it apart from the retarded and advanced Green's functions and which would make it completely inappropriate in the context of classical physics. How come that we can still use it in quantum physics? Discuss!

¹Oskar Klein, 1894-1977, was a Swedish theoretical physicist. He worked several years as Niels Bohr's assistant in Copenhagen. 1930 he succeeded Ivar Fredholm (big guy in the theory of integral equations) as professor of mathematical physics at Stockholm University. Klein made several important contributions to physics, including the discovery of the *Klein paradox* (today realizable in *graphene!*), and for inventing the idea, part of *Kaluza-Klein theory*, that there may be extra dimensions – curled up and hidden – an essential ingredient in string theory.

²Richard Feynman, 1918-1988, American theorist who made fundamental contributions to physics, incl. the path integral formulation of quantum mechanics, QED (for which he got the Nobel prize in 1965), and the theory of superfluids. Feynman was also the first to discuss the possibility to construct a *quantum computer*, a hot area of research in physics today. His Caltech lectures from the 1960's, *The Feynman Lectures on Physics*, are arguably the best introduction to basic physics. Highly recommended!

2. Energin i en stjärna produceras genom kärnreaktioner. Ekvationerna som beskriver hur dessa processer äger rum arbetades fram under den tidigare delen av 1900-talet och vi ska här göra om en av dessa räkningar med hjälp av sadelpunktsmetoden. Viktiga frågor är hur mycket energi som produceras totalt, vilka reaktioner som äger rum och vilka ämnen som därigenom skapas, något som Hans Bethe [1] tillsammans med många andra funderade på under 20- och 30-talet. Här löser vi en del av den första av dessa frågeställningar.

Antalet kollisioner i en stjärna per tidsenhet med kinetisk energi E i intervallet E till $E + dE$ ges av [2]

$$N(E)dE = Ce^{-\frac{E}{kT}}EdE,$$

där k är Boltzmanns konstant, T är temperaturen och C en konstant.

Sannolikheten att en kollision med kinetisk energi E resulterar i en kärnreaktion är [3]

$$P(E) = Me^{-\frac{\alpha}{\sqrt{E}}},$$

där M och α är konstanter.

Hitta ett approximativt uttryck för det totala antalet kärnreaktioner per tidsenhet under antagandet att

$$\tilde{s} \equiv \left(\frac{kT}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{3}} \ll 1.$$

a) (1p) Skriv ned uttrycket för totala antalet reaktioner som en integral.

b) (1p) Hitta en omskrivning av integranden som tar den till formen $f(x)e^{sg(x)}$, där $s = \frac{1}{\tilde{s}}$.

c) (4p) Ge ett approximativt svar till totala antalet reaktioner under antagandet att $\tilde{s} \ll 1$.

[1] H. A. Bethe. Energy production in stars. Phys. Rev., 55:434–456, 1939.

[2] R. E. Atkinson and F.G. Houtermans. Zur Frage der Aufbaumöglichkeit der Elemente in Sternen. Zeitschrift für Physik, 54(9-10):656–665, 1929.

[3] G. Gamow and E. Teller. The rate of selective thermonuclear reactions. Phys. Rev., 53:608–609, 1938.

3. (4p) Läs Lord Kelvins essä (se länken *Lord Kelvin on Dido* på Canvas) om hur den feniciska prinsessan Dido genom ett smart drag tillskansade sig mark och lade grunden till stadsstaten Kartago... den första historiskt belagda användningen av variationskalkyl! Formulera Didos problem med modern matematik och ge en explicit lösning. Motivera varje steg noggrant. (För att få ett litet enklare problem så är det OK att göra antagandet att kuststräckan är en rät linje.)

4. (4p) Lös integralekvationen

$$y(x) = x + \lambda \int_0^1 xz y(z) dz.$$

För vilka värden på λ är Din lösning OK? Diskutera ditt svar i ljuset av *Fredholmalternativet*.