# Inlämningsuppgifter kursvecka 3
**Matematisk fysik FTF131, lp 2 2022**

**Deadline: Fredagen 2 december**

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Du får gärna arbeta tillsammans med din kurskamrater, men de lösningar som du lämnar in måste du ta ansvar för själv! På muntan i januari kommer du att få redogöra för hur Du löst en av inlämningsuppgifterna.

---

**1.** Erwin Schrödinger, before settling for the nonrelativistic Schrödinger equation, and later Oskar Klein* and Walter Gordon attempted to build relativistic quantum mechanics from the squared energy relation $E^2 = \boldsymbol{p}^2 + m^2$ by using the standard operator replacements for $E$ and $\boldsymbol{p}$. This led them to the *Klein-Gordon equation*

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2)\phi(t, \boldsymbol{r}) = j(t, \boldsymbol{r}),$$

where (in natural units $\hbar = c = 1$) $j(t, \boldsymbol{r})$ is a source term, and $\phi(t, \boldsymbol{r})$ is a *quantum field*, which, with an appropriate interpretation, describes spinless elementary particles of mass $m$. The Higgs boson, predicted by the standard model and discovered experimentally at CERN in 2012, is an important example.

a) (2p) Determine the Fourier transformed Green's function corresponding to the Klein-Gordon equation.

b) (3p) Calculate the time dependence of the advanced and retarded Green's function of the Klein-Gordon equation.

c) (3p) It is possible to define a very different Green's function by pushing *one* pole of its Fourier transform into the upper half plane, with the other one being pushed into the lower half plane. The Fourier transformed Green's function thus obtained is called a *Feynman propagator*†. Determine an integral representation of the Feynman propagator. Can you find an argument why this Green's function is completely inappropriate in the context of classical physics? How come that we can still use it in quantum physics? Discuss!

*Oskar Klein, 1894-1977, was a Swedish theoretical physicist. He worked several years as Niels Bohr's assistant in Copenhagen. 1930 he succeeded Ivar Fredholm (big guy in the theory of integral equations) as professor of mathematical physics at Stockholm University. Klein made several important contributions to physics, including the discovery of the *Klein paradox* (today realizable in *graphene!)*, and for inventing the idea, part of *Kaluza-Klein theory*, that there may be extra dimensions – curled up and hidden – an essential ingredient in string theory.

†Richard Feynman, 1918-1988, American theorist who made fundamental contributions to physics, incl. the path integral formulation of quantum mechanics, QED (for which he got the Nobel prize in 1965), and the theory of superfluids. Feynman was also the first to discuss the possibility to construct a *quantum computer*, a hot area of research in physics today. His Caltech lectures from the 1960's, *The Feynman Lectures on Physics,* are arguably the best introduction to basic physics. Highly recommended!

**2.** Energin i en stjärna produceras genom kärnreaktioner. Ekvationerna som beskriver hur dessa processer äger rum arbetades fram under den tidigare delen av 1900-talet och vi ska här göra om en av dessa räkningar med hjälp av sadelspunktsmetoden. Viktiga frågor är hur mycket energi som produceras totalt, vilka reaktioner som äger rum och vilka ämnen som därigenom skapas, något som Hans Bethe [1] tillsammans med många andra funderade på under 20- och 30-talet. Här löser vi en del av den första av dessa frågeställningar.

Antalet kollisioner i en stjärna per tidsenhet med kinetisk energi $E$ i intervallet $E$ till $E+dE$ ges av [2]

$$N(E)dE \quad = \quad Ce^{-\frac{E}{kT}}EdE,$$

där $k$ är Boltzmanns konstant, $T$ är temperaturen och $C$ en konstant.

Sannolikheten att en kollision med kinetisk energi $E$ resulterar i en kärnreaktion är [3]

$$P(E) \quad = \quad Me^{-\frac{\alpha}{\sqrt{E}}},$$

där $M$ och $\alpha$ är konstanter.

Hitta ett approximativt uttryck för det totala antalet känreaktioner per tidsenhet under antagandet att

$$\tilde{s} \equiv \left(\frac{kT}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad \ll \quad 1.$$

a) (1p) Skriv ned uttrycket för totala antalet reaktioner som en integral.

b) (1p) Hitta en omskrivning av integranden som tar den till formen $f(x)e^{sg(x)}$, där $s = \frac{1}{\tilde{s}}$.

c) (4p) Ge ett approximativt svar till totala antalet reaktioner under antagandet att $\tilde{s} \ll 1$.

[1] H. A. Bethe. Energy production in stars. Phys. Rev., 55:434–456, 1939.
[2] R. E. Atkinson and F.G. Houtermans. Zur Frage der Aufbaumöglichkeit der Elemente in Sternen. Zeitschrift für Physik, 54(9-10):656–665, 1929.
[3] G. Gamow and E. Teller. The rate of selective thermonuclear reactions. Phys. Rev., 53:608–609, 1938.

**3.** (4p) I min diskussion av Neumannserier (onlineföreläsning 16/11) säger jag att man i de flesta enklare fysiktillämpningar sällan behöver undersöka konvergensvillkoret för serien utan kan förlita sig på fysikalisk intuition. Dock, för att vara på "säkra sidan" kan man ofta ganska enkelt kolla upp det tillräckliga villkoret för konvergens, $|\lambda|\,||K||^2 = |\lambda| \int_a^b dx \int_a^b dt |K(x,t)|^2 < 1$, där $K$ är integralkärnan, $\lambda$ den förfaktor som multiplicerar integralen i integralekvationen, och $[a,b] \times [a,b]$ det intervall på vilket kärnan är definierad.

Betrakta integralekvationen

$$\varphi(x) = x + \int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt$$

där $K(x,t) = x$ om $0 \le x < t$ medan $K(x,t) = t$ om $t < x \le 1$. Visa att integralekvationens Neumannserie konvergerar och beräkna de tre första termerna i serien.

**4.** (4p) Betrakta en partikel som rör sig från en punkt $A$ till en punkt $B$. Tiden $\tau$ som det tar partikeln att tillryggalägga sträckan från $A$ till $B$ i partikelns *vilosystem* (dvs. den tid som uppmäts av en observatör som följer med partikeln) kallas i den speciella relativitetsteorin för *egentid*. Egentiden är densamma i alla referenssystem, vilket i relativitetsteorin uttrycks som att $c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)$ är en *invariant*. Här är $dt, dx, dy$ och $dz$ infinitesimala tids- och rumsintervall uppmätta i ett givet referenssystem och $c$ är ljushastigheten. (I vilosystemet är $dx = dy = dz = 0$ eftersom observatören följer med partikeln, och det medför alltså att $dt = d\tau$, därav namnet *egentid*.)

Låt oss anta att partikeln rör sig längs en rät linje från $(x_A, 0, 0)$ till $(x_B, 0, 0)$ i ett icke-accelererande cartesiskt koordinatsystem $(x, y, z)$. Antag vidare att egentiden för partikeln att gå från $A$ till $B$ i ett sådant koordinatsystem ges av ett extremvärde. Använd variationskalkyl för att visa att avståndet $x_B - x_A$ är direkt proportionell mot den uppmätta koordinattiden[‡] $t_B - t_A$ för partikeln att gå från $A$ till $B$.

*All information som krävs för att formulera en lösningsstrategi finns i texten ovan. Du behöver inte läsa kursen i spec rel för att fixa en lösning! Dock, för att tolka och sätta in din lösning i ett sammanhang krävs litet kunskaper i spec rel.*

[‡]Med *koordinattid* avses den tid som uppmäts i ett givet koordinatsystem av en observatör i vila relativt koordinatystemet, i fallet ovan $(x, y, z)$. Såsom poängterats ovan så sammanfaller koordinattiden med egentiden bara för en observatör som också är i vila relativt partikeln.