Inlämningsuppgifter kursvecka 5

Matematisk fysik FTF131, lp 2 2020

Deadline: Fredagen 18 december

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! Efter kursens slut kan Du komma att kallas till ett individuellt eftersamtal där Du får redogöra för hur Du löst några av inlämningsuppgifterna.

---

1. (5p) **Värmeledningsekvationen**

Visa att Greenfunktionen som svarar mot värmeledningsekvationen

$$(c\frac{\partial}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2})\, T(x,t) = \rho(x,t)$$

ges av

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi c t}} \exp(\frac{-cx^2}{4\mu t}), \quad t > 0.$$

Här är c det specifika värmet, μ är en diffusionskonstant, $T(x,t)$ ett temperaturfält, och $\rho(x,t)$ en värmekälla. Givet detta resultat, hur snabbt sprider sig värmen från en lokaliserad värmepuls? Stämmer detta verkligen? Är det något som är fel på värmeledningsekvationen eller kanske i just detta fall Greenfunktionstekniken att lösa partiella diff ekvationer? Diskutera!

2. Monsieur Lebesgue & Signore Fubini

a) (3p) Betrakta funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3 x & \text{om } 0 \le x \le 1/2n \\ n^2 - 2n^3(x - 1/2n) & \text{om } 1/2n \le x \le 1/n \\ 0 & \text{om } 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

för $n \in N$, och $x \in [0,1]$. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \quad \text{och} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx.$$

Diskutera Ditt resultat i ljuset av *Lebesgues dominerade konvergensteorem!*

b) (3p) Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{sgn}(y-x)}{\max(x,y)^2},$$

definierad i intervallet $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$. Beräkna $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\,dx)\,dy)$ och $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\,dy)\,dx)$. Diskutera Ditt resultat i ljuset av *Fubinis teorem!*

3. (5p) Symmetri i kaos: Sierpinskis triangel

På en av mina föreläsningar tog jag upp *fraktaler* som matematiska idealiseringar av skalinvarianta objekt. En av de första fraktalerna ritades av den polske matematikern Waclaw Sierpinski 1915, se http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html för en bild!

Sierpinskis triangel kan idag enkelt konstrueras på en datorskärm via följande algoritm:

Rita först upp en liksidig triangel i planet. Indicera hörnen med A, B, respektive C, och välj en godtycklig punkt inuti triangeln. Välj sedan slumpmässigt ett av hörnen, A, B, eller C. Om A väljs, flytta den valda punkten halvvägs mot hörnet A (analogt for B och C om ett av dessa hörn väljs). Plotta den flyttade punkten. Iterera proceduren!

Implementera algoritmen i valfritt datorprogram (bifoga koden!) och verifiera att resultatet verkligen ges av Sierpinskis triangel. Hur kan en slumpmässig process ge upphov till en symmetri, i detta fall skalinvarians? Diskutera!

4. (4p) Romeo och Julia i roddbåten...

På en av mina föreläsningar diskuterade jag ett enkelt mekanikproblem där uppgiften var att beräkna rekylen som en roddbåt gör när Romeo tar mod till sig och går över och sätter sig hos Julia. Två fall diskuterades: Roddbåten flytande på (1) en ideal vätska (viskositeten $\eta = 0$), och (2) en viskös vätska ($\eta \neq 0$). Jag argumenterade att fallet (1) inte kan fås genom att ta gränsen $\eta \to 0$ i (2). Håller Du med? Diskutera!

Undersök först noggrant om mina lösningar i de två fallen verkligen är korrekta! Kanske du kan hitta lösningar där (1) faktiskt följer från (2) genom att ta gränsen $\eta \to 0$? Om inte, kan det vara så att gränsen $\eta \to 0$ är *singulär*? Isfall, varför? Fritt fram för hypoteser och spekulationer! För en diskussion om singulära gränser i fysiken, se artikeln av Michael Berry, länkad på Canvas under *Singulära gränser*.