

Inlämningsuppgifter kursvecka 5

Matematisk fysik FTF131, lp 2 2021

Deadline: Fredagen 17 december

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! På muntan i januari kommer du att få redogöra för hur Du löst en av inlämningsuppgifterna.

1. (5p) Värmeledningsekvationen

Visa att Greenfunktionen som svarar mot värmeledningsekvationen

$$\left(c \frac{\partial}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T(x, t) = \rho(x, t)$$

ges av

$$G(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi ct}} \exp\left(\frac{-cx^2}{4\mu t}\right), \quad t > 0.$$

Här är c det specifika värmets, μ är en diffusionskonstant, $T(x, t)$ ett temperaturfält, och $\rho(x, t)$ en värmekälla. Givet detta resultat, hur snabbt sprider sig värmen från en lokaliserad värmepuls? Stämmer detta verkligen? Är det något som är fel på värmeledningsekvationen eller kanske i just detta fall Greenfunktionstekniken att lösa partiella differentialekvationer? Diskutera!

2. (5p) Symmetri i kaos: Sierpinskis triangel

På en av mina föreläsningar tog jag upp *fraktaler* som matematiska idealiseringar av skalinvariananta objekt. En av de första fraktalerna ritades av den polske matematikern Waclaw Sierpinski 1915, se <http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html> för en bild!

Sierpinskis triangel kan idag enkelt konstrueras på en datorskärm via följande algoritm:

Rita först upp en liksidig triangel i planet. Indicera hörnen med A , B , respektive C , och välj en godtycklig punkt inuti triangeln. Välj sedan slumpmässigt ett av hörnen, A , B , eller C . Om A väljs, flytta den valda punkten halvvägs mot hörnet A (analogt för B och C om ett av dessa hörn väljs). Plotta den flyttade punkten. Iterera proceduren!

Implementera algoritmen i valfritt datorprogram (bifoga koden!) och verifiera att resultatet verkligen ges av Sierpinskis triangel. Hur kan en slumpmässig process ge upphov till en symmetri, i detta fall skalinvarians? Diskutera!

3. (5p) Hägring i öknen

En hägring i en het öken uppstår på grund av att ljuset färdas snabbare i varm luft än i kall (eftersom den varma luften är tunnare än den kalla). Visa med hjälp av variationskalkyl och Fermats princip (*"en ljusstråle mellan två punkter följer den snabbaste vägen"*) att i detta fall en ljusstråle från en ljuskälla i punkten A till en observatör i punkten B följer en konvex kurva med formen av en elliptisk båge. Öknen antas här vara helt platt, med h_A och h_B ljuskällans respektive observatörens höjd ovan mark. Kan du förklara hur en hägring hänger ihop med den konvexa kurvan?

Ledning: Skriv ljushastigheten som $v(h) = v_0 - h/a$, där v_0 är hastigheten vid (den heta!) marken, h är höjden ovan mark, och a är en parameter.

4. (5p) Romeo och Julia i roddbåten...

På en av mina föreläsningar diskuterade jag ett enkelt mekanikproblem där uppgiften var att beräkna rekylen som en roddbåt gör när Romeo tar mod till sig och går över och sätter sig hos Julia. Två fall diskuterades: Roddbåten flytande på (1) en ideal vätska (viskositeten $\eta = 0$), och (2) en viskös vätska ($\eta \neq 0$). Jag argumenterade att fallet (1) inte kan fås genom att ta gränsen $\eta \rightarrow 0$ i (2). Håller Du med? Diskutera!

Undersök först noggrant om mina lösningar i de två fallen verkligen är korrekta! Kanske du kan hitta lösningar där (1) faktiskt följer från (2) genom att ta gränsen $\eta \rightarrow 0$? Om inte, kan det vara så att gränsen $\eta \rightarrow 0$ är *singulär*? Isåfall, varför? Fritt fram för hypoteser och spekulationer! För en diskussion om singulära gränser i fysiken, se artikeln av Michael Berry, länkad på Canvas under *Singulära gränser*.