

# Inlämningsuppgifter kursvecka 5

## Matematisk fysik FTF131, lp 2 2022

**Deadline: Fredagen 16 december**

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! På muntan i januari kommer du att få redogöra för hur Du löst en av inlämningsuppgifterna.

---

### 1. Retarderad potential

Potentialen  $\phi(\mathbf{r}, t)$  från en punktladdning  $q$  som rör sig längs en kurva  $\boldsymbol{\xi}(t)$  ges av Poissons ekvation

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = q \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}(t)).$$

1. a) (2p) Bestäm den retarderade Greenfunktionen till denna ekvation.

b) (3p) Använd ditt svar i a) till att hitta ett slutet uttryck för motsvarande retarderade potential.

### 2. (5p) Symmetri i kaos: Sierpinskis triangel

På en av mina föreläsningar tog jag upp *fraktaler* som matematiska idealiseringar av skalinvarianta objekt. En av de första fraktalerna ritades av den polske matematikern Waclaw Sierpinski 1915, se <http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html> för en bild!

Sierpinskis triangel kan idag enkelt konstrueras på en datorskärm via följande algoritm:

*Rita först upp en liksidig triangel i planet. Indicera hörnen med A, B, respektive C, och välj en godtycklig punkt inuti triangeln. Välj sedan slumpmässigt ett av hörnen, A, B, eller C. Om A väljs, flytta den valda punkten halvvägs mot hörnet A (analogt för B och C om ett av dessa hörn väljs). Plotta den flyttade punkten. Iterera proceduren!*

Implementera algoritmen i valfritt datorprogram och verifiera att resultatet verkligen ges av Sierpinskis triangel. Hur kan en slumpmässig process ge upphov till en symmetri, i detta fall skalinvarians? Diskutera!

*Bifoga din kod och kommentera noggrant vad som händer i den.*

### 3. (4p) Nord Stream 1 & 2

En undervattensexlosion av det slag som 26 september i år skedde vid gasledningarna Nord Stream 1 & 2 ger upphov till ytvågor som sprider sig radiellt från explosionscentrum, kalla det  $A$ . Med (det förenklade och något orealistiska!) antagandet att havsbotten i det aktuella fallet är approximativt plan och att dessutom våglängden  $\lambda$  hos ytvågorna är  $>$  havsdjupet  $h$  så gäller att vågorna rör sig med en hastighet  $v(h) \approx \sqrt{gh}$  där  $g$  är tyngdaccelerationen. Betrakta en observatör  $B$  som står vid en strand på Bornholm. Visa att  $B$  ser vågorna som orsakats av explosionen i  $A$  komma in parallellt med strandremsan.

*Ledning: Variationskalkyl!*

### 4. (4p) Romeo och Julia i roddbåten...

På en av mina föreläsningar diskuterade jag ett enkelt mekanikproblem där uppgiften var att beräkna rekylen som en roddbåt gör när Romeo tar mod till sig och går över och sätter sig hos Julia. Två fall diskuterades: Roddbåten flytande på (1) en ideal vätska (viskositeten  $\eta = 0$ ), och (2) en viskös vätska ( $\eta \neq 0$ ). Jag argumenterade att fallet (1) inte kan fås genom att ta gränsen  $\eta \rightarrow 0$  i (2). Håller Du med? Diskutera!

*Undersök först noggrant om mina lösningar i de två fallen verkligen är korrekta! Kanske du kan hitta lösningar där (1) faktiskt följer från (2) genom att ta gränsen  $\eta \rightarrow 0$ ? Om inte, kan det vara så att gränsen  $\eta \rightarrow 0$  är singulär? Isåfall, varför? Fritt fram för hypoteser och spekulationer! För en diskussion om singulära gränser i fysiken, se artikeln av Michael Berry, länkad på Canvas under Singulära gränser.*