Inlämningsuppgifter kursvecka 6

Matematisk fysik FTF131, lp 2 2017

Deadline: Onsdagen 20 december.

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! Efter kursens slut kan Du komma att kallas till ett individuellt eftersamtal där Du får redogöra för hur Du löst några av inlämningsuppgifterna.

---

1. (5p) **Värmeledningsekvationen**

Visa att Greenfunktionen som svarar mot värmeledningsekvationen

$$(c\frac{\partial}{\partial t} - \mu\frac{\partial^2}{\partial x^2})\,T(x,t) = \rho(x,t)$$

ges av

$$G(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi ct}}\exp(\frac{-cx^2}{4\mu t}), \quad t > 0.$$

Här är c det specifika värmet, μ är en diffusionskonstant, $T(x,t)$ ett temperaturfält, och $\rho(x,t)$ en värmekälla. Givet detta resultat, hur snabbt sprider sig värmen från en lokaliserad värmepuls? Stämmer detta verkligen? Är det något som är fel på värmeledningsekvationen eller kanske i just detta fall Greenfunktionstekniken att lösa partiella diff ekvationer? Diskutera!

2. Monsieur Lebesgue & Signore Fubini

a) (3p) Betrakta funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^3x & \text{om } 0 \leq x \leq 1/2n \\ n^2 - 2n^3(x - 1/2n) & \text{om } 1/2n \leq x \leq 1/n \\ 0 & \text{om } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

för $n \in N$, och $x \in [0,1]$. Beräkna

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \quad \text{och} \quad \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Diskutera Ditt resultat i ljuset av *Lebesgues dominerade konvergensteorem!*

b) (3p) Betrakta funktionen

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{sgn}(y-x)}{\max(x,y)^2},$$

definierad i intervallet $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$. Beräkna $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\,dx)\,dy)$ och $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)\,dy)\,dx)$. Diskutera Ditt resultat i ljuset av *Fubinis teorem!*

3. (5p) **Symmetri i kaos: Sierpinskis triangel**

På en av mina föreläsningar tog jag upp *fraktaler* som matematiska idealiseringar av skalinvarianta objekt. En av de första fraktalerna ritades av den polske matematikern Waclaw Sierpinski 1915, se http://mathworld.wolfram.com/SierpinskiSieve.html för en bild!

Sierpinskis triangel kan idag enkelt konstrueras på en datorskärm via följande algoritm:

Rita först upp en liksidig triangel i planet. Indicera hörnen med A, B, respektive C, och välj en godtycklig punkt inuti triangeln. Välj sedan slumpmässigt ett av hörnen, A, B, eller C. Om A väljs, flytta den valda punkten halvvägs mot hörnet A (analogt for B och C om ett av dessa hörn väljs). Plotta den flyttade punkten. Iterera proceduren!

Implementera algoritmen i ett Matlab/Mathematica program (bifoga koden!) och verifiera att resultatet verkligen ges av Sierpinskis triangel. Hur kan en slumpmässig process ge upphov till en symmetri, i detta fall skalinvarians? Diskutera!

4. (4p) **Variationskalkyl... (tentaproblem från 2014)**

Baksidan av en flyghangar vetter mot en äng. I båda ändarna på hangarens baksida är ett säkerhetsstängsel med längd L fastsatt. Beskriv en metod att hitta den placering av stängslet som ger maximalt inhägnad area, givet att man till sitt förfogande har en remsa av ängen som är precis lika bred som hangarens baksida. Kan du konstruera den differentialekvation som löser problemet? (Du behöver inte lösa ekvationen.)