

Inlämningsuppgifter kursvecka 7

Matematisk fysik FTF131, lp 2 2017

Deadline: Fredag 12 januari. Lämna dina lösningar i lådan märkt "FTF131", Soliden vån 3, eller mejla dem till Silvia, ruffieux@chalmers.se, med cc till mig henrik.johannesson@physics.gu.se

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

1. Kul & klurigt med grupper och representationer.

- a) (1p) Identifiera fyra olika delgrupper till S_4 som är isomorfa med S_3 och nio som är isomorfa med S_2 .
- b) (1p) Bestäm ordningen för den delgrupp till S_4 som fixerar (i) 1, (ii) 1 och 2, (iii) $\{1,2\}$.
- c) (1p) Bestäm gfg^{-1} och fgf^{-1} om $f = (1\ 3) \in S_3$ och $g = (1\ 2\ 3) \in S_3$.
- d) (1p) Låt $f, g \in S_4$. Visa att om $f = (1\ 2\ 3\ 4)$, så är $gfg^{-1} = (g(1)\ g(2)\ g(3)\ g(4))$.
- e) (1p) Betrakta en mängd G med fyra element e, a, b, c , med en kompositionsregel ("multiplikation") $ee = e, ea = a, eb = b, ec = c, ae = a, aa = e, be = b, ce = c$. På hur många sätt kan Du fullborda multiplikationstabellen så att G bildar en grupp?
- f) (1p) Ordningen av ett element g i en grupp är det minsta heltalet n sådant att $g^n = e$, där e är enhetselementet. Vilka ordningar har elementen i Diedergruppen D_3 ?
- g) (1p) Visa att om varje element x i en grupp G satisfierar $x^2 = e$, där e är enhetselementet, så är G abelsk.
- h) (2p) Låt G vara en grupp av ordning 5. Visa att G är Abelsk.
- i) (1p) Konjugatklasserna till permutationsgruppen S_n bestäms av strukturerna på cyklerna som representerar gruppelmenten. T.ex., $(12)(3)(4)$ och $(14)(2)(3)$ i S_4 tillhör samma konjugatklass, medan (1234) och (1342) tillhör en annan konjugatklass. Hur många konjugatklasser har S_4 ?
- j) (2p) Antalet inekvivalenta irreps till en grupp är lika med antalet konjugatklasser. Använd detta resultat och Ditt svar i i) till att visa att S_4 har åtminstone en irrep av dimensionen ≥ 3 .

2. (4p) $\text{SO}(2)$

(i) Betrakta gruppen $\text{SO}(2)$ med en G-modul i xy -planet. Lägg till en reflektion i yz -planet. Den resulterande gruppen kallas $\text{O}(2)$. Är $\text{O}(2)$ isomorf med $\text{SO}(2)$? Är $\text{O}(2)$ en abelsk grupp?

(ii) Antag att Du igen startar med $\text{SO}(2)$ men denna gång lägger till transformationen $(x, y) \rightarrow -(x, y)$. Är den resulterande gruppen isomorf med $\text{SO}(2)$? Är den abelsk?

3. (4p) Lorentzinvariants

Visa att vågekvationen

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

är invariant under Lorentztransformationen

$$x \rightarrow \gamma(x - vt), \quad y \rightarrow y, \quad z \rightarrow z, \quad t \rightarrow \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

där γ är Lorentzfaktorn.