Inlämningsuppgifter kursvecka 7

Matematisk fysik FTF131, lp 2 2020

Deadline: Fredag 15 januari

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! Efter kursens slut kan Du komma att kallas till ett individuellt eftersamtal där Du får redogöra för hur Du löst några av inlämningsuppgifterna.

---

1. (14p) Kul & klurigt med gruppteori

a) (1p) Identifiera fyra olika delgrupper till S_4 som är isomorfa med S_3 och nio som är isomorfa med S_2.

b) (1p) Bestäm ordningen för den delgrupp till S_4 som fixerar (i) 1, (ii) 1 och 2, (iii) {1,2}.

c) (1p) Låt $f, g \in S_4$. Visa att om $f = (1\,2\,3\,4)$, så är $gfg^{-1} = (g(1)\,g(2)\,g(3)\,g(4))$.

d) (1p) Betrakta en mängd G med fyra element $e, a, b, c,$ med en kompositionsregel ("multiplikation") $ee = e, ea = a, eb = b, ec = c, ae = a, aa = e, be = b, ce = c$. På hur många sätt kan Du fullborda multiplikationstabellen så att G bildar en grupp?

e) (1p) Visa att om varje element x i en grupp G satisfierar $x^2 = e$, där e är enhetselementet, så är G Abelsk.

f) (2p) Låt G vara en grupp av ordning 5. Visa att G är Abelsk.

g) (1p) Konjugatklasserna till permutationsgruppen S_n bestäms av strukturerna på cyklerna som representerar gruppelementen. T.ex.: (12)(3)(4) och (14)(2)(3) i S_4 tillhör samma konjugatklass, medan (1234) och (1342) tillhör en annan konjugatklass. Hur många konjugatklasser har S_4?

h) (2p) Antalet inekvivalenta irreps till en grupp är lika med antalet konjugatklasser. Använd detta resultat och Ditt svar i g) till att visa att S_4 har åtminstone en irrep av dimensionen ≥ 3.

i) (2p) Antalet element i kvotmängden G/H (där H är en delgrupp till G) kallas *index* för H i G och betecknas $i_{G/H}$. Visa att G/H är en kvotgrupp om $i_{G/H} = 2$.

j) (2p) Betrakta en grupphomomorfism $f : G \to G'$. Mängden av element i G som avbildas på identitetselementet i G' under f kallas *kärnan* till f och betecknas $Ker f$. Visa att $Ker f$ är en normal delgrupp (dvs. $g\, Ker f = Ker f\, g$ för alla $g \in G$).

2. Lorentzinvarians (4p)

Visa att vågekvationen

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi$$

är relativistiskt invariant.
Ledning: Det räcker att visa invarians under Lorentztransformationen $x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - vx/c^2)$ *där* $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

3. (6p) Ekvivalensrelationer

Som vi sett på föreläsningarna så spelar *ekvivalensrelationer* en viktig roll både i gruppteori och topologi. Illustrera begreppet *ekvivalensrelation* genom att lösa följande två uppgifter!

a) (3p) Låt A och B vara två delgrupper till en ändlig grupp G. Visa att relationen

$$g \sim g' \text{ om } g' = agb \text{ för något } a \in A, b \in B$$

är en ekvivalensrelation som delar in G i *dubbla sidoklasser* $Ag_iB, i = 1, 2, ..., r$ (där r är antalet dubbla sidoklasser). Kan du genom att välja några enkla grupper G, A och B ge ett exempel på hur en sådan indelning i dubbla sidoklasser kan se ut?

b) (3p) Låt $D^2 = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ vara en cirkulär skiva. Identifiera punkterna på cirkeln $S^1 = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$ (vilken bildar skivans rand) genom ekvivalensrelationen

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ om } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1.$$

Kvotrummet $D^2/\sim$ bildar en topologisk mångfald. Vilken?

4. (6p) Glatta mångfalder

På den sista föreläsningen 18/12 beskrev jag den atlas över S^2 som ges av de stereografiska projektionerna

$$\phi_i : \mathcal{O}_i \to R^2, \ i = 1, 2$$

där

$$\mathcal{O}_1 = S^2 - \{\mathbf{S}\}, \ \ \mathcal{O}_2 = S^2 - \{\mathbf{N}\}$$

Använd Cartesiska koordinater på R^2 för att ge ett explicit uttryck för *överföringsfunktionen* $g_{21} = \phi_1\phi_2^{-1} : R^2 - \{0\} \to R^2 - \{0\}$. Använd ditt resultat till att visa att en sfär är en *glatt mångfald.*