Inlämningsuppgifter kursvecka 7
Matematisk fysik FTF131, lp 2 2021

Deadline: Fredag 7 januari

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! På muntan i januari kommer du att få redogöra för hur Du löst en av inlämningsuppgifterna.

---

1. (14p) Kul & klurigt med gruppteori

a) (1p) Identifiera fyra olika delgrupper till S_4 som är isomorfa med S_3 och nio som är isomorfa med S_2.

b) (1p) Bestäm ordningen för den delgrupp till S_4 som fixerar (i) 1, (ii) 1 och 2, (iii) {1,2}.

c) (1p) Låt $f, g \in S_4$. Visa att om $f = (1\,2\,3\,4)$, så är $gfg^{-1} = (g(1)\,g(2)\,g(3)\,g(4))$.

d) (1p) Betrakta det euklidiska planet R^2 med ett fixt ortonormerat koordinatsystem Oxy. Låt H bestå av fyra avbildningar: e = identitetsavbildningen, a = spegling i x-axeln, b = spegling i y-axeln, c = spegling i origo. Denna grupp (eller en isomorf grupp) kallas *Kleins fyragrupp*. Konstruera multiplikationstabellen för H (sammansättning av avbildningar) och bestäm dess delgrupper.

e) (1p) Visa att om varje element x i en grupp G satisfierar $x^2 = e$, där e är enhetselementet, så är G Abelsk.

f) (2p) Låt G vara en grupp av ordning 5. Visa att G är Abelsk.

g) (1p) Konjugatklasserna till permutationsgruppen S_n bestäms av strukturerna på cyklerna som representerar gruppelementen. T.ex.: (12)(3)(4) och (14)(2)(3) i S_4 tillhör samma konjugatklass, medan (1234) och (1342) tillhör en annan konjugatklass. Hur många konjugatklasser har S_4?

h) (2p) Antalet inekvivalenta irreps till en grupp är lika med antalet konjugatklasser. Använd detta resultat och Ditt svar i g) till att visa att S_4 har åtminstone en irrep av dimensionen ≥ 3.

i) (2p) Betrakta tre-element gruppen $G = \{e, a, b\}$ med en representation D där

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Uppfyller D det fundamentala ortogonalitetsteoremet? Motivera ditt svar noga!

j) (2p) Betrakta en grupphomomorfism $f : G \to G'$. Mängden av element i G som avbildas på identitetselementet i G' under f kallas *kärnan* till f och betecknas $Ker\,f$. Visa att $Ker f$ är en normal delgrupp (dvs. $g\; Ker f = Ker f\; g$ för alla $g \in G$).

3. (4p) Lorentzinvarians

Visa att vågekvationen

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi$$

är relativistiskt invariant.

Ledning: Det räcker att visa invarians under Lorentztransformationen $x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - vx/c^2)$ *där* $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

3. (6p) Ekvivalensrelationer

Som vi sett på föreläsningarna så spelar *ekvivalensrelationer* en viktig roll både i gruppteori och topologi. Illustrera begreppet *ekvivalensrelation* genom att lösa följande två uppgifter!

a) (3p) Låt A och B vara två delgrupper till en ändlig grupp G. Visa att relationen

$$g \sim g' \text{ om } g' = agb \text{ för något } a \in A, b \in B$$

är en ekvivalensrelation som delar in G i *dubbla sidoklasser* $Ag_iB, i = 1, 2, ..., r$ (där r är antalet dubbla sidoklasser). Kan du genom att välja några enkla grupper G, A och B ge ett exempel på hur en sådan indelning i dubbla sidoklasser kan se ut?

b) (3p) Låt $D^2 = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ vara en cirkulär skiva. Identifiera punkterna på cirkeln $S^1 = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$ (vilken bildar skivans rand) genom ekvivalensrelationen

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ om } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1.$$

Kvotrummet $D^2/\!\sim$ bildar en topologisk mångfald. Vilken?

4. (6p) Glatta mångfalder

På den digitala föreläsningen 1217Topologi(I) beskrev jag den atlas över S^2 som ges av de stereografiska projektionerna

$$\phi_i : \mathcal{O}_i \to R^2, \; i = 1, 2$$

där

$$\mathcal{O}_1 = S^2 - \{\mathbf{S}\}, \quad \mathcal{O}_2 = S^2 - \{\mathbf{N}\}.$$

Använd Cartesiska koordinater på R^2 för att ge ett explicit uttryck för *överföringsfunktionen* $g_{21} = \phi_1\phi_2^{-1} : R^2 - \{0\} \to R^2 - \{0\}$. Använd ditt resultat till att visa att en sfär är en *glatt mångfald.*