Inlämningsuppgifter kursvecka 7
Matematisk fysik FTF131, lp 2 2022

Deadline: Torsdag 5 januari

Strukturera Dina lösningar noggrant. Uppställda samband skall motiveras. Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas. Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! På muntan i januari kommer du att få redogöra för hur Du löst en av inlämningsuppgifterna.

---

1. (11p) Kul & klurigt med gruppteori

a) (1p) Identifiera fyra olika delgrupper till S_4 som är isomorfa med S_3 och nio som är isomorfa med S_2.

b) (1p) Betrakta det euklidiska planet R^2 med ett fixt ortonormerat koordinatsystem Oxy. *Kleins fyragrupp* består av fyra avbildningar: e = identitetsavbildningen, a = spegling i x-axeln, b = spegling i y-axeln, c = spegling i origo. Identifiera den delgrupp till S_4 som är isomorf med Kleins fyragrupp.

c) (1p) Visa att om varje element x i en grupp G satisfierar $x^2 = e$, där e är enhetselementet, så är G Abelsk.

d) (1p) Konjugatklasserna till permutationsgruppen S_n bestäms av strukturerna på cyklerna som representerar gruppelementen. T.ex.: (12)(3)(4) och (14)(2)(3) i S_4 tillhör samma konjugatklass, medan (1234) och (1342) tillhör en annan konjugatklass. Hur många konjugatklasser har S_4?

e) (2p) Antalet inekvivalenta irreps till en grupp är lika med antalet konjugatklasser. Använd detta resultat och Ditt svar i d) till att visa att S_4 har åtminstone en irrep av dimensionen ≥ 3.

f) (1p) Givet två ekvivalenta irreps av en grupp G med matriser $D(g)$ respektive $D^*(g) = S^{-1}D(g)S$, visa att SS^* är diagonal.

g) (2p) Givet en ändlig grupp G med en irrep $D^{(\nu)}$ av dimension n_ν, betrakta matrisen

$$B_k^\nu \equiv \sum_{g \in C_k} D^{(\nu)}(g)$$

där C_k är en av konjugatklasserna i G. Visa att $B_k^\nu = \lambda_k^\nu \mathbb{1}$, där koefficienten λ_k^ν är en skalär (som kallas *Dirackaraktären* för konjugatklassen C_k). Kan du hitta ett uttryck som relaterar Dirackaraktären till (den vanliga) karaktären $\chi_k^{(\nu)}$ för C_k?

h) (2p) Betrakta en grupphomomorfism $f : G \to G'$. Mängden av element i G som avbildas på identitetselementet i G' under f kallas *kärnan* till f och betecknas $Ker\, f$. Visa att $Kerf$ är en normal delgrupp (dvs. $g\, Kerf = Kerf\, g$ för alla $g \in G$).

2. (4p) Lorentzgruppen

Lorentzgruppen består av alla linjära transformationer $x \to x' = \Lambda x$ sådana att $(dx')^2 = (dx)^2$, där $(dx)^2 = c^2 dt^2 - (d\boldsymbol{r})^2$ är Minkowskimetriken. Λ är här en 4×4 matris, och $x = (ct, \boldsymbol{r})$ är en 4-vektor där c är ljushastigheten. Viktiga exempel på sådana transformationer är rotationer och Lorentzboosts. Visa att vågekvationen

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varphi = 0$$

är invariant under rotationer och Lorentzboosts.

Ledning: För att visa rotationsinvariansen, använd att matriserna som utför rotationer kring de tre cartesiska koordinataxlarna är ortogonala. Vidare: det räcker att välja en Lorentzboost längs en specifierad koordinataxel, t.ex. $x' = \gamma(x - vt), y' = y, z' = z, t' = \gamma(t - vx/c^2)$ *där* $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

3. (5p) Ekvivalensrelationer

Som vi sett på föreläsningarna så spelar *ekvivalensrelationer* en viktig roll både i gruppteori och topologi. Illustrera begreppet *ekvivalensrelation* genom att lösa följande två uppgifter!

a) (3p) Låt A och B vara två delgrupper till en ändlig grupp G. Visa att relationen

$$g \sim g' \text{ om } g' = agb \text{ för något } a \in A, b \in B$$

är en ekvivalensrelation som delar in G i *dubbla sidoklasser* $Ag_iB, i = 1, 2, ..., r$ (där r är antalet dubbla sidoklasser). Kan du genom att välja några enkla grupper G, A och B ge ett exempel på hur en sådan indelning i dubbla sidoklasser kan se ut?

b) (2p) Låt $D^2 = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 \leq 1\}$ vara en cirkulär skiva. Identifiera punkterna på cirkeln $S^1 = \{(x, y) \in R^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$ (vilken bildar skivans rand) genom ekvivalensrelationen

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ om } x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1.$$

Kvotrummet $D^2/\sim$ bildar en topologisk mångfald. Vilken?

4. (4p) Glatta mångfalder

På kursens sista föreläsning 16/12 (digitala avsnittet Topologi(I)) definierade jag begreppet *karta* och *atlas* för topologiska mångfalder, med enhetssfären S^2 som exempel. Försök att på egen hand konstruera en atlas för enhetscirkeln S^1. Använd ditt resultat till att visa att S^1 är en *glatt mångfald*.