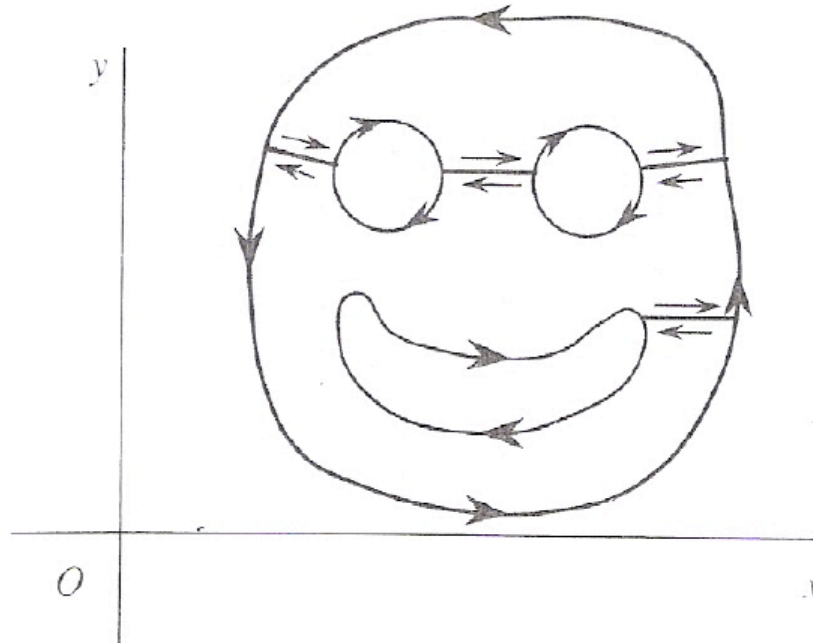


En paus från Green's funktioner...

Residykalkyl:

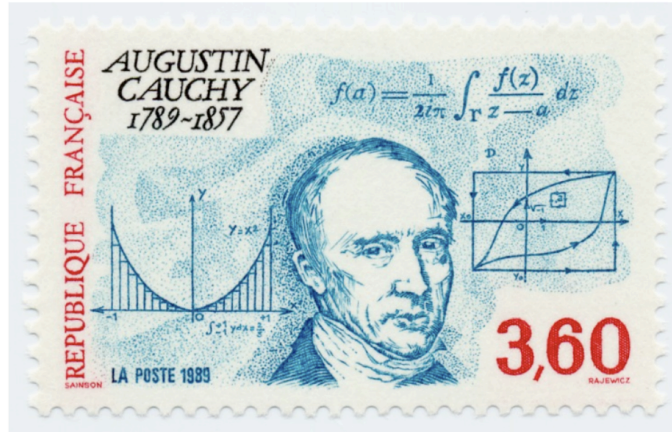
Eleganta räkningar av förskräckliga integraler



Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Analogi: Laplaces ekvation + randvärdesvillkor bestämmer unikt en elektrostatisk potential

Laurentserie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad f \text{ analytisk på en ring } \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Singulariteter

“Borttagbara” singulariteter

$$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1} \quad (\text{exempel})$$

Essentiella singulariteter

oändligt många Laurenttermer med $n < 0$

$$f(z) = e^{1/z} \quad (\text{exempel})$$

Pol av ordning m

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m}$$

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Residyteoremet

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \text{Res}(f(z_k))$$

C enkel, positivt orienterad kurva som innesluter de singulära punkterna z_1, z_2, \dots, z_k till f

Vanligaste tillämpningen av residykalkyl i fysiken:

“komplexifierade” reella integraler

Användbart resultat:

Jordans lemma

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0$$

C_R halvcirkel med radien R i övre komplexa halvplanet

f går likformigt mot 0 snabbare än $1/|z|$ då $|z| \rightarrow \infty$

α icke-negativt reellt tal

Enkla typfall:

I. Integraler av rationella funktioner

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx \quad q(x) \neq 0 \text{ för reella } x$$

II. Integraler av produkter av rationella och trigonometriska funktioner

$q(x) \neq 0$ för reella x , a reell

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \cos(ax) dx$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \sin(ax) dx$$

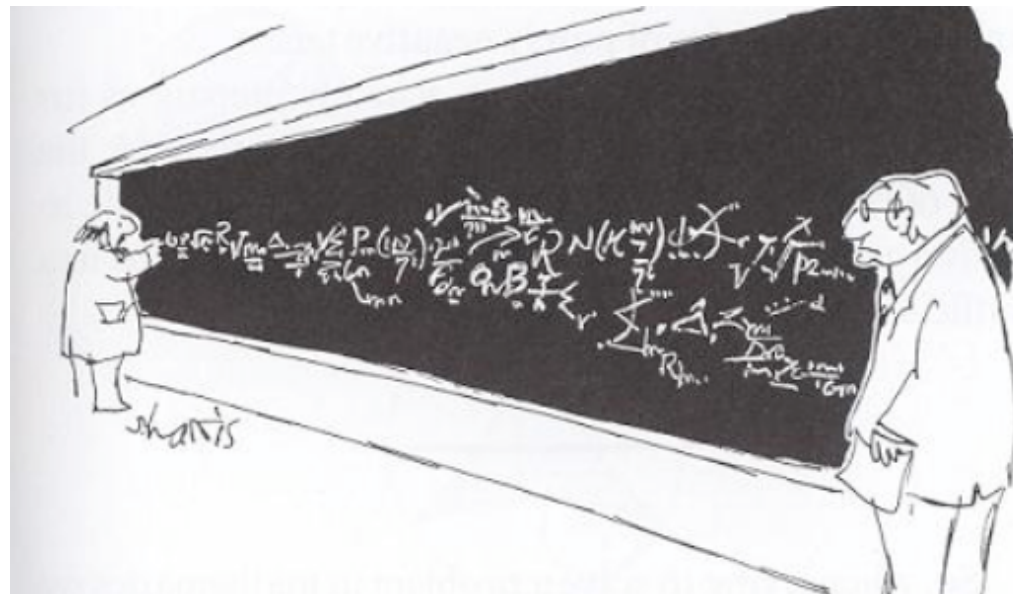
III. Integraler av trigonometriska funktioner på enhetscirkeln

$$\int_0^{2\pi} F(\sin \theta, \cos \theta) d\theta$$

Men minst lika ofta i fysiken...

Förskräckliga integraler!

...kan fortfarande lösas elegant
med fiffig användning av residykalkyl!



Välj en smart kurva!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2} dx \quad a, b \in \mathbb{R}, b > 0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

... eller integrera längs ett snitt!

Flervärd komplex funktion [jfr. $\ln(z)$]

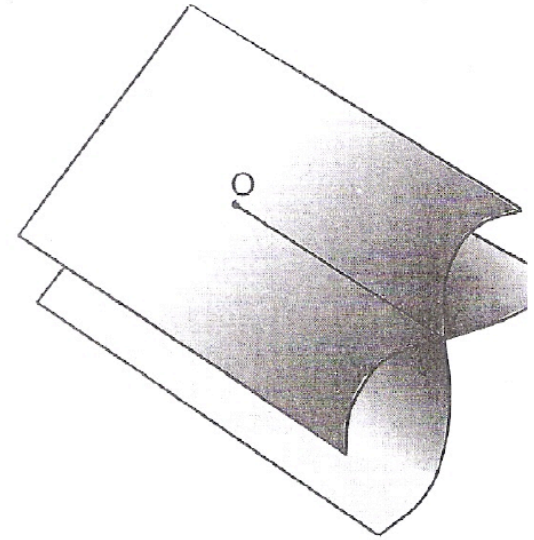


sekvens av enkelvärda komplexa funktioner definierade i "uppskurna" komplexa talplanet



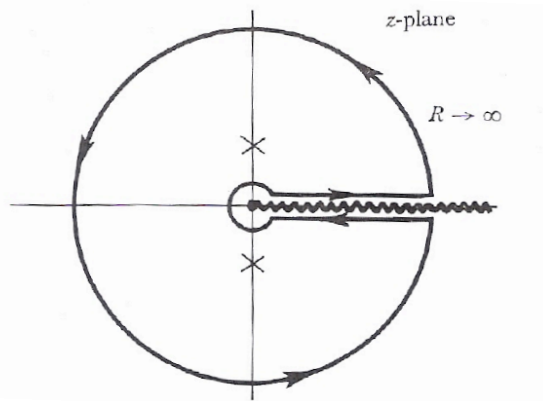
en enkelvärd komplex funktion definierad på en Riemannnyta
[= Riemannblad ihopklitrade längs *grensnitt*]

sammanbinder två *grenpunkter*
(eller en grenpunkt med "punkten i oändligheten")

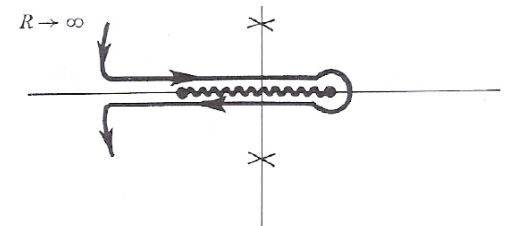


Riemannnyta för funktionen $f(z) = z^{1/2}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$$



$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$$



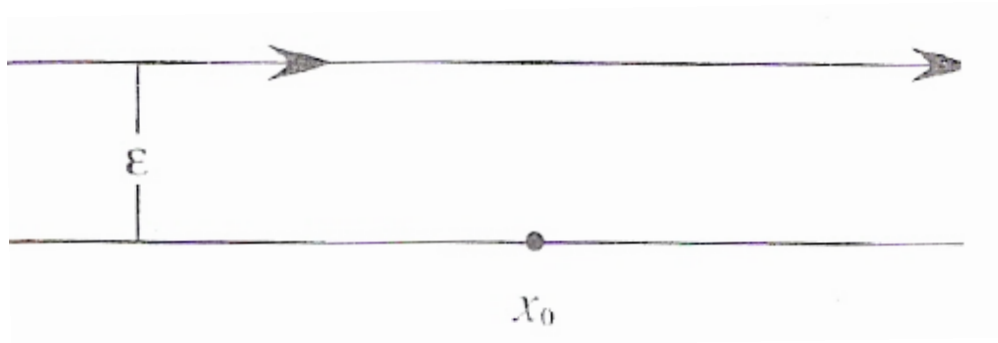
Viktig integral vid fysikillämpningar:

“Principalvärdet” för en reell funktion med en enkel pol

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \pm i\pi f(x_0) + 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}\left[\frac{f(z_j)}{z_j - x_0}\right]$$

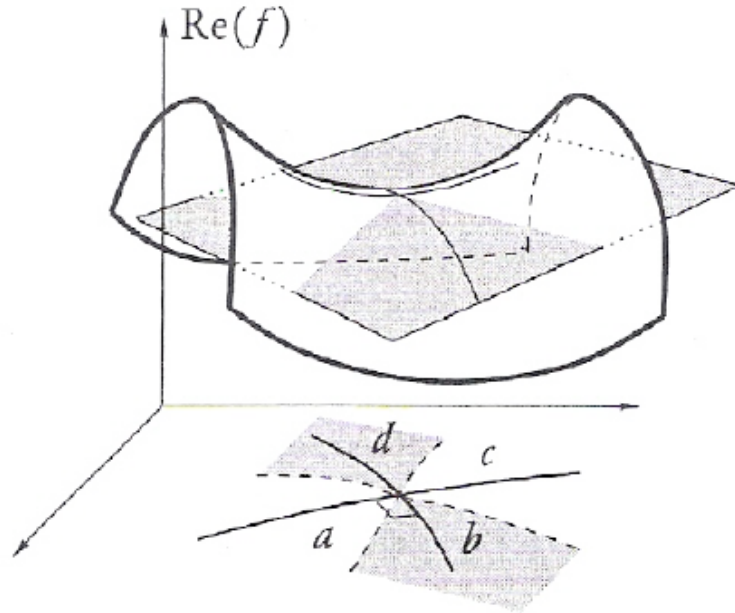
där z_j är polerna till $\frac{f(z)}{z-x_0}$ i övre (+) eller undre (-) komplexa halvplanet.

“Fysikjargong”: $\frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} = P \frac{1}{x - x_0} dx \mp i\pi\delta(x - x_0)$



Sadelpunktsmetoden *redux*

$$\int_{\gamma} e^{-f_{\alpha}(z)} dz \quad f_{\alpha} \text{ komplexvärd funktion, } \gamma \text{ kurva i } \mathbb{C}$$



Stationära fas-metoden

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i f_{\alpha} x} dx \quad f_{\alpha} \text{ reellvärd funktion}$$