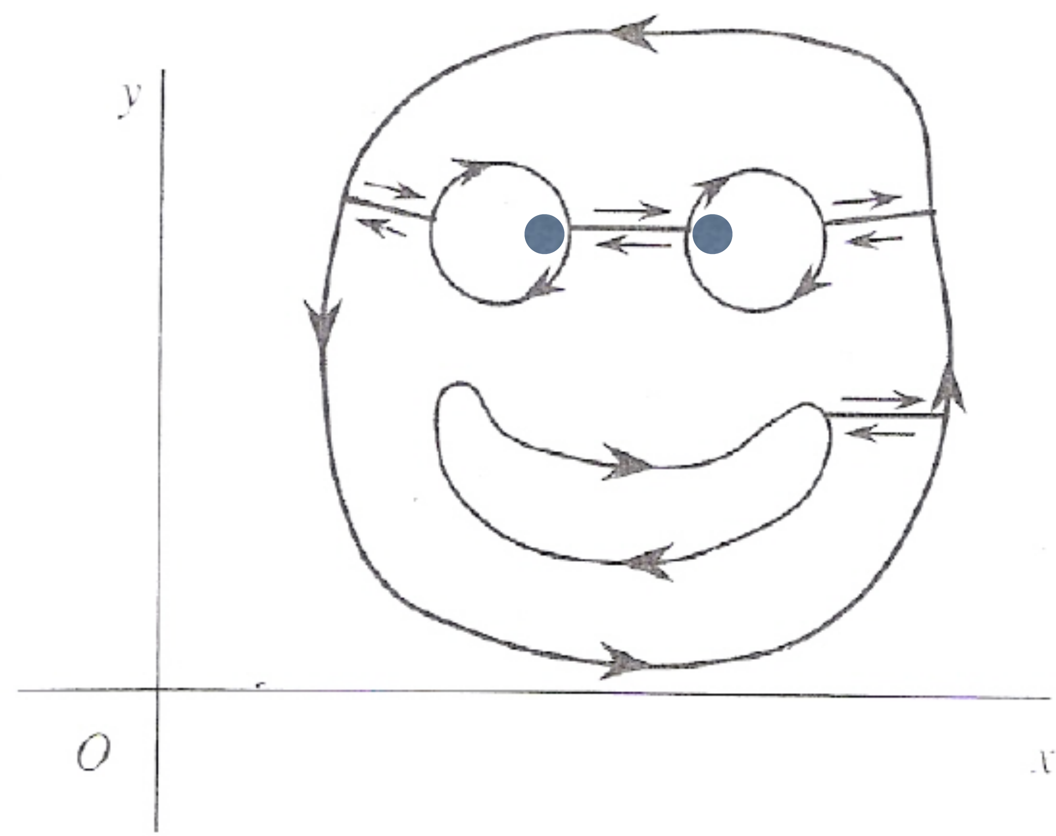
förskräckliga integraler...



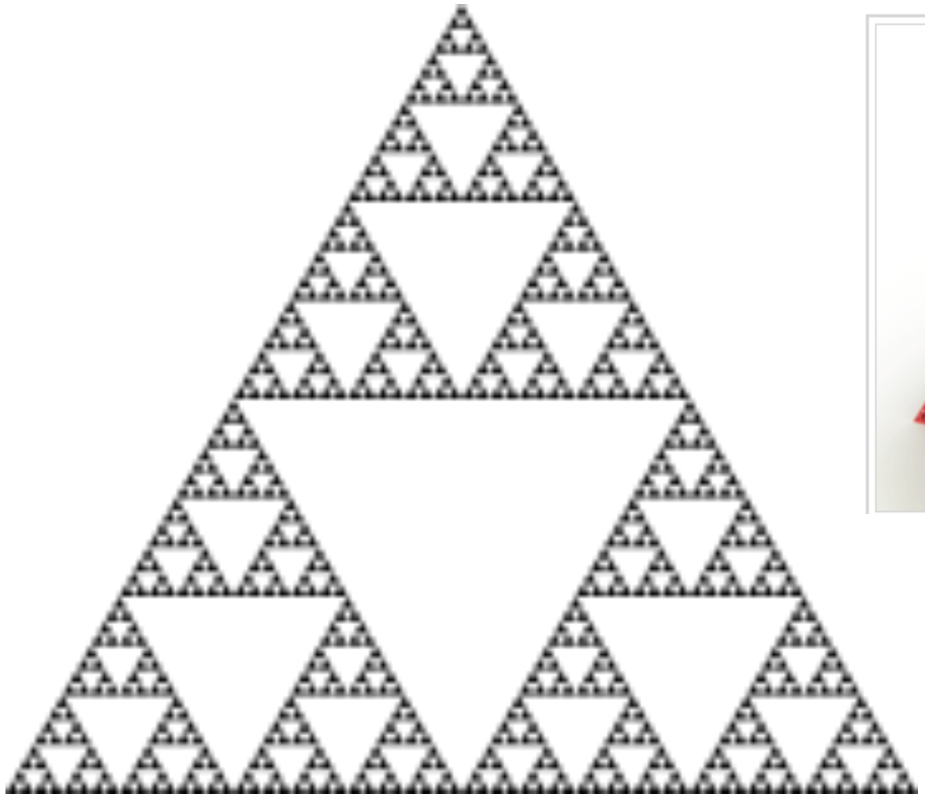
Matematisk fysik 2017
Föreläsning 9

Hur integrera ***verkligt* komplicerade funktioner**, t.ex. funktioner som beskriver en

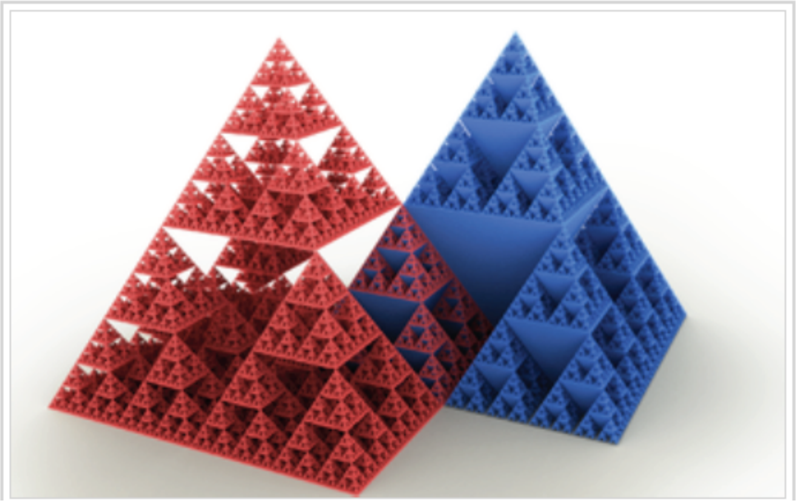
FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?

Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

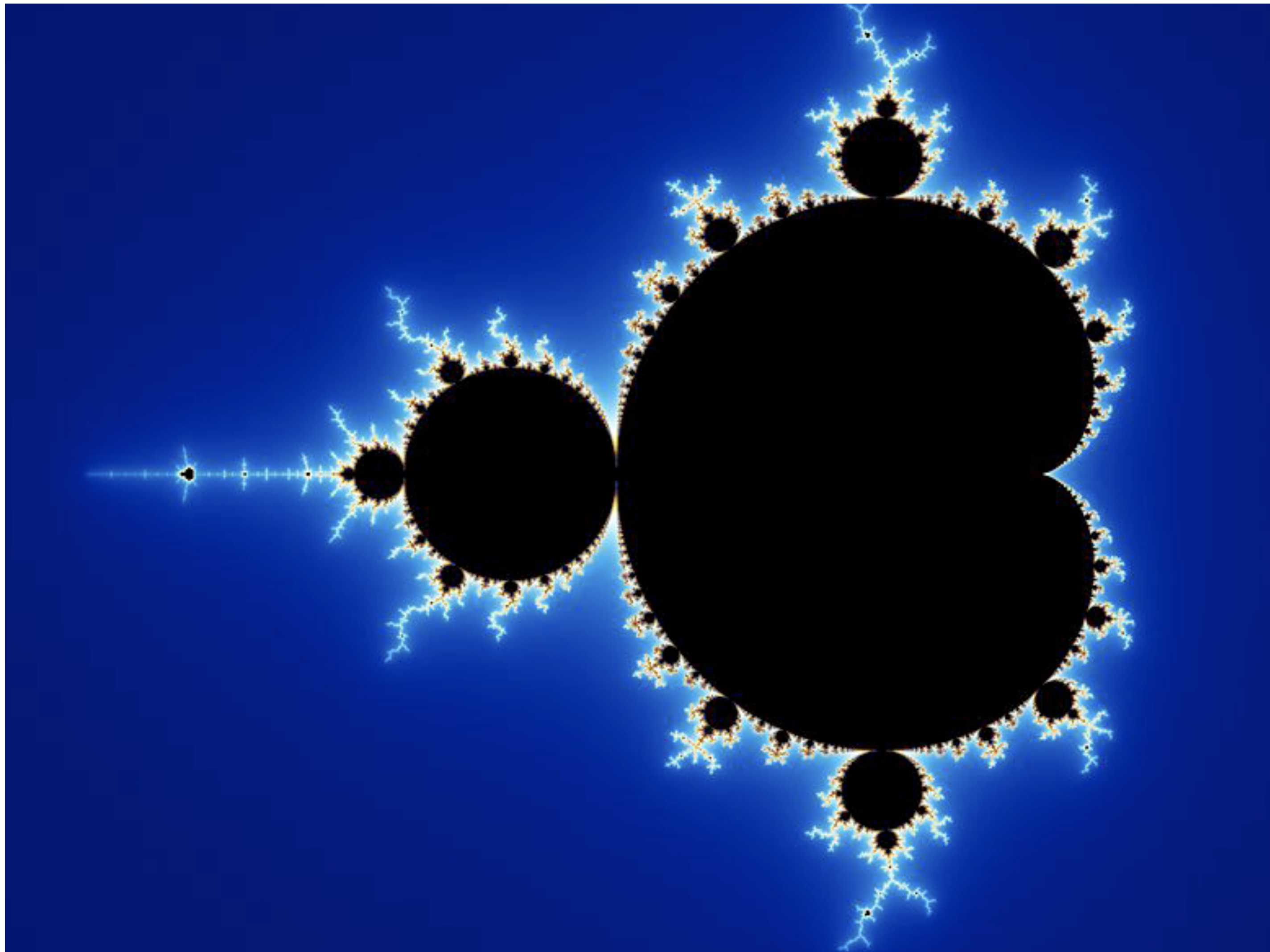
FRAKTAL eller är definierade på en FRAKTAL?



Sierpinskis triangel



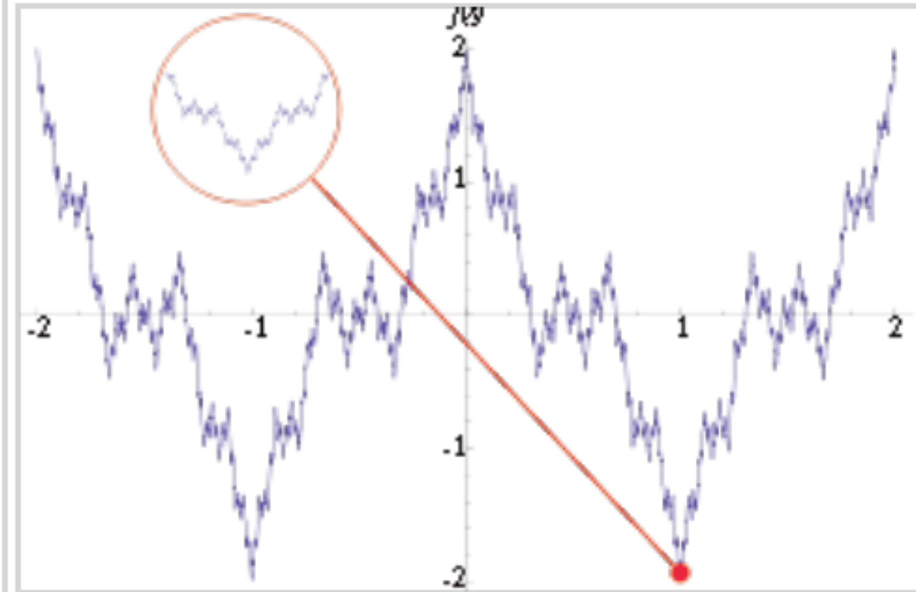
Mandelbrotmängd



http://www.youtube.com/watch?v=gEw8xpb1aRA

Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$



Plot of Weierstrass Function over the interval $[-2, 2]$. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.

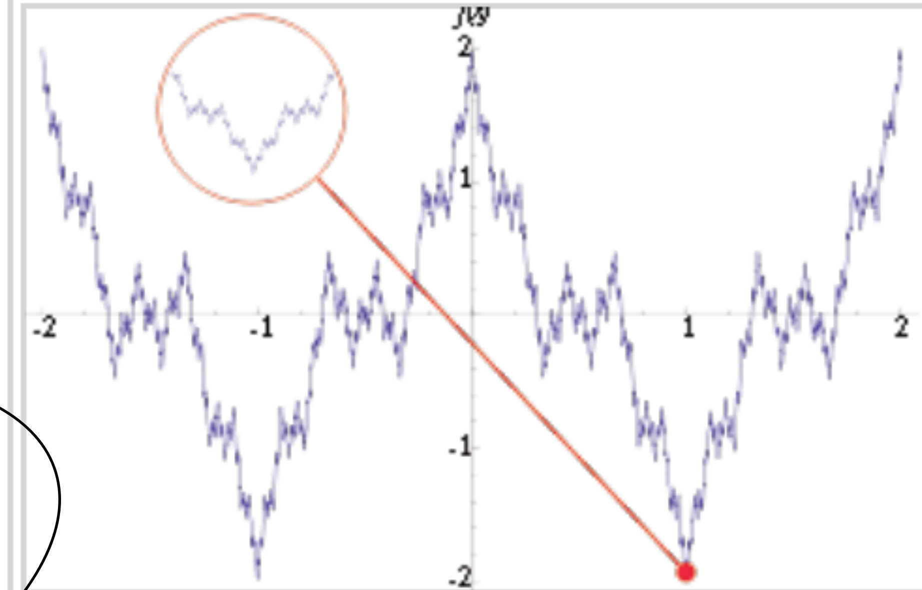
Karl Weierstrass

...kontinuerlig funktion som inte är deriverbar någonstans!

Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

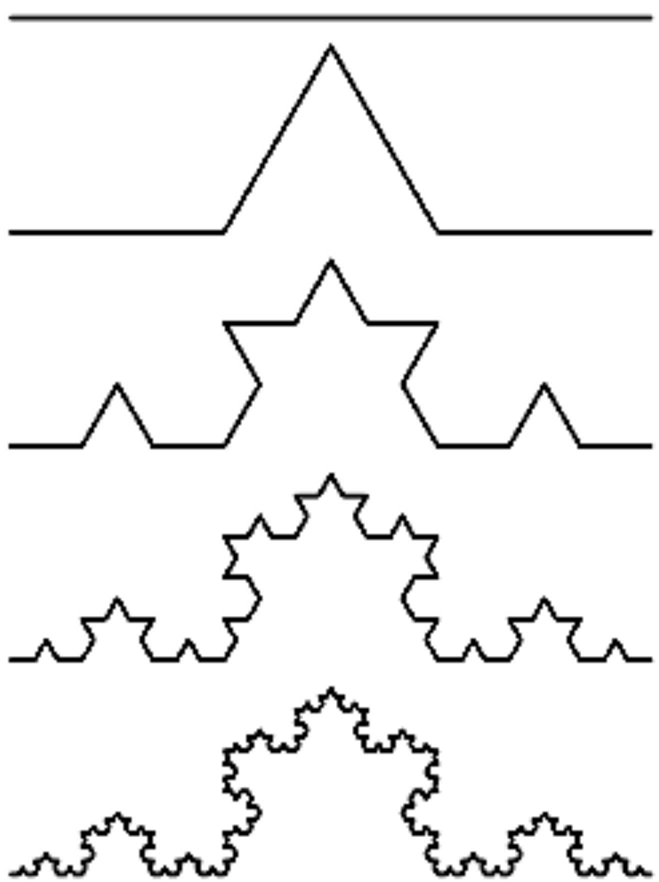
... ett patologiskt monster!
...ovärdigt matematiken!



Plot of Weierstrass Function over the interval $[-2, 2]$. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.

Charles Hermite, omkring 1887

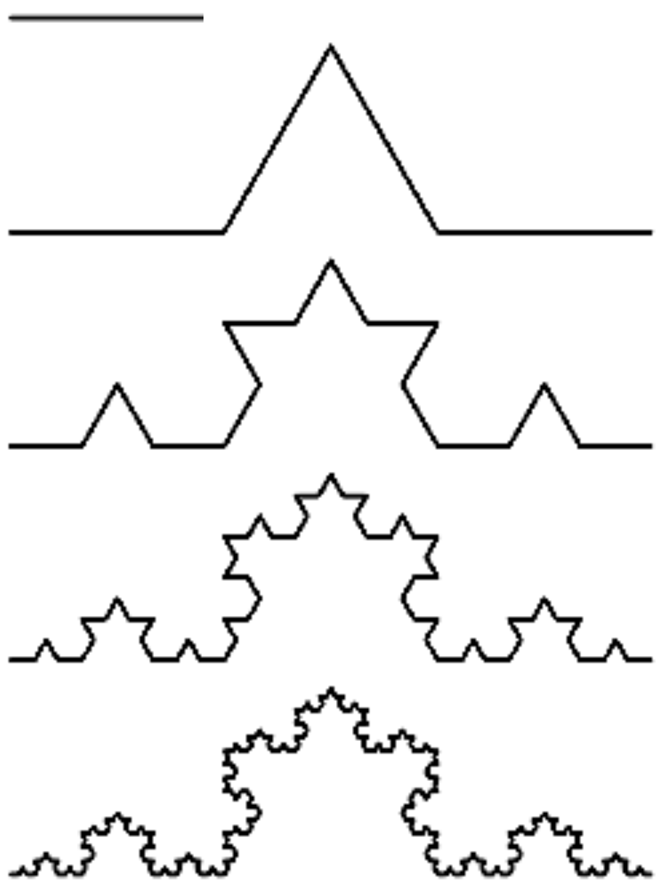
Kochkurva



1. Tag en linje.
2. Dela linjen i tre lika stora delar.
3. Gör ~~en kopia~~ två kopior av den mellersta delen.
4. Sätt upp de två kopiorna i vinkel mot varandra så att de får plats inom samma sträcka som en ensam linje annars gör.
5. Upprepa (iterera) från steg 2 för alla de nya linjer som uppkommit av operationen.

http://www.youtube.com/watch?v=JdMgvSWSKZI

Kochkurva

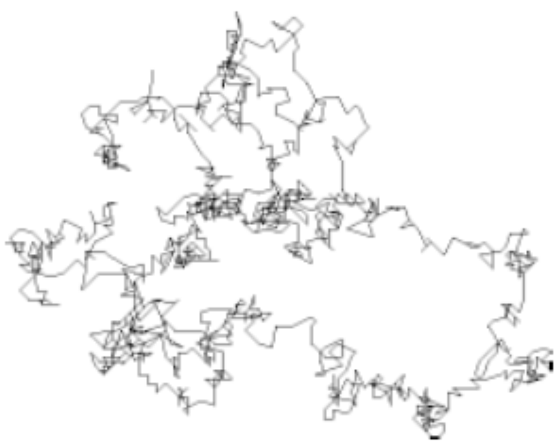


Hausdorff-dimension

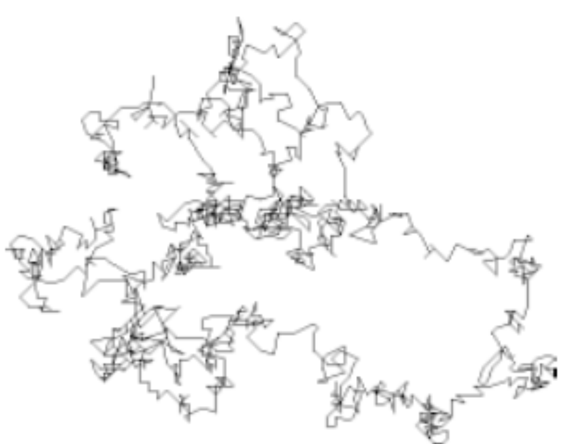
$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

Brownsk rörelse (datoranimerad)

Length=8747, Step=16



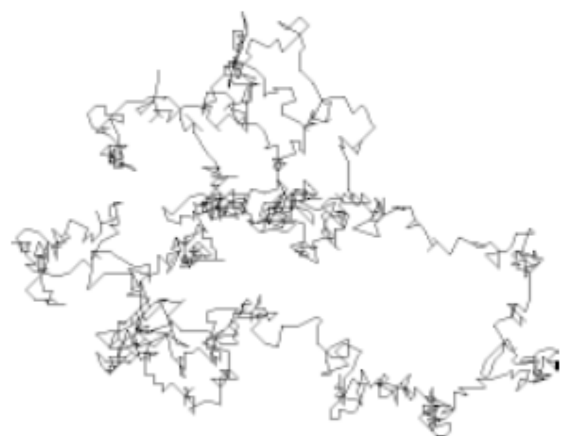
Length=12091, Step=8



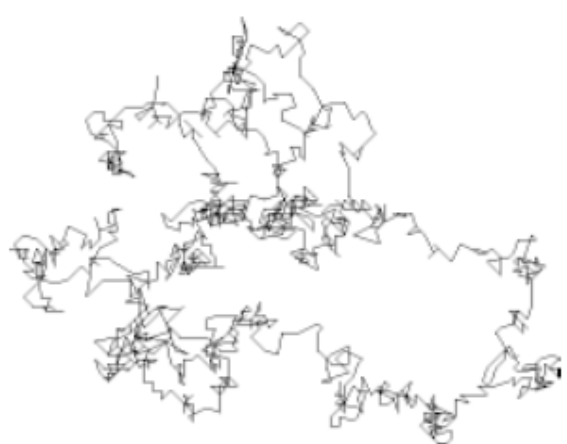
Length=17453, Step=4

Brownsk rörelse (datoranimerad)

Length=8747, Step=16



Length=12091, Step=8



Length=17453, Step=4

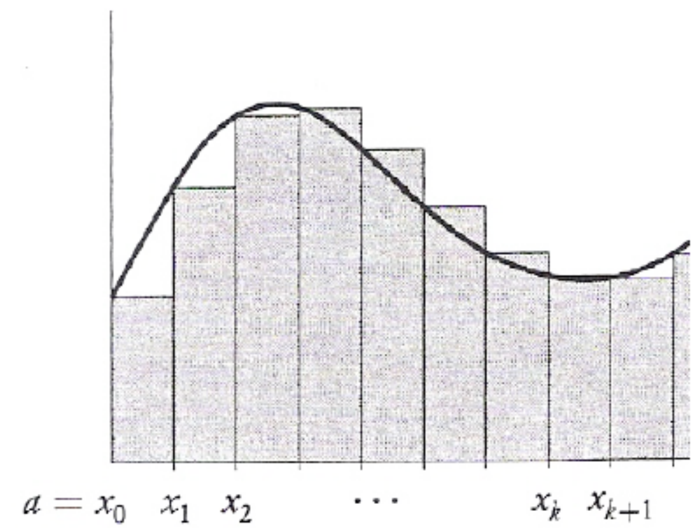
Fysiktillämpning:
Integrera över en funktion som beskriver statistiskt viktade "Brownska rörelser" i gränsen av en infinitesimalt kort steglängd

Bernhard Riemann, 1826 - 1866

Riemann-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig

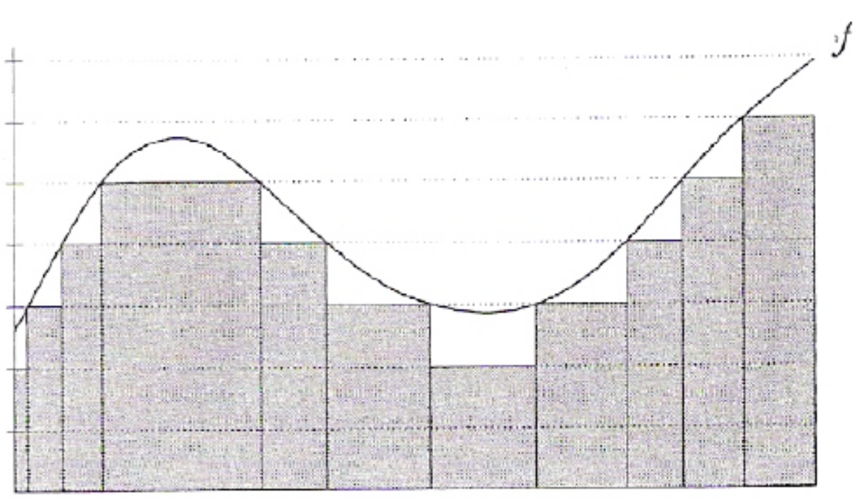


Lebesgue-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

$$A_k^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

μ Lebesguemått



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *mätbar* funktion

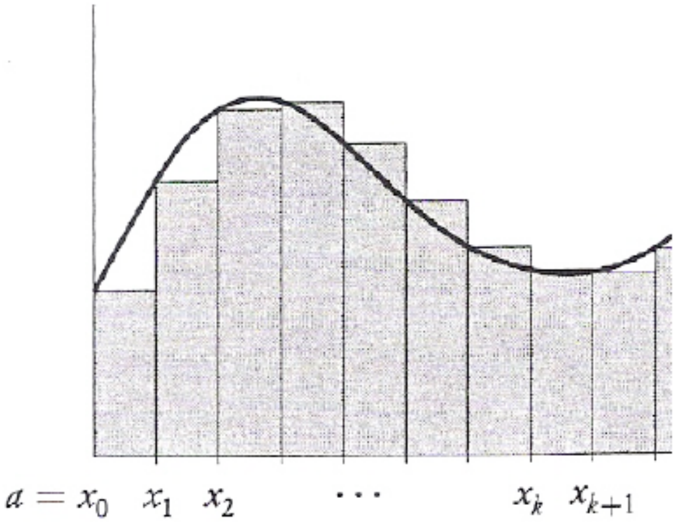
Henri Lebesgue, 1875 -1941

Integraler och gränsvärden?
(derivator, serier, andra integraler,...)

Riemann-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

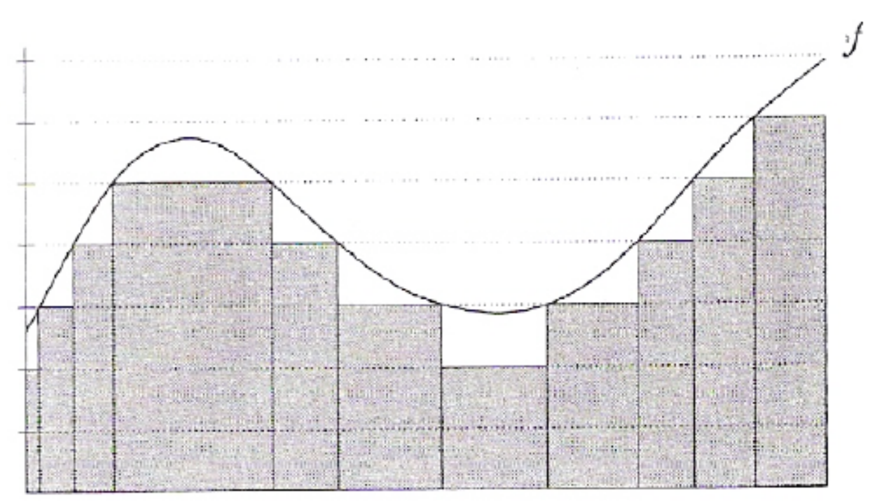
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig



Lebesgue-integral

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n} \qquad A_k^{(n)} = f^{-1}\left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$$

μ Lebesguemått



$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *mätbar* funktion

Lebesgues och Fubinis teorem

Lebesgues (dominerade) konvergensteorem (lättversion)

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$$

om f_n konvergerar punktvis till f nästan överallt
och det existerar en Lebesgue-integrabel funktion
g sådan att $|f_n| \leq g$ nästan överallt

Fubini (-Tonelli) teoremet (lättversion)

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\,dy\right)dx = \int_Y \left(\int_X f(x,y)\,dx\right)dy$$

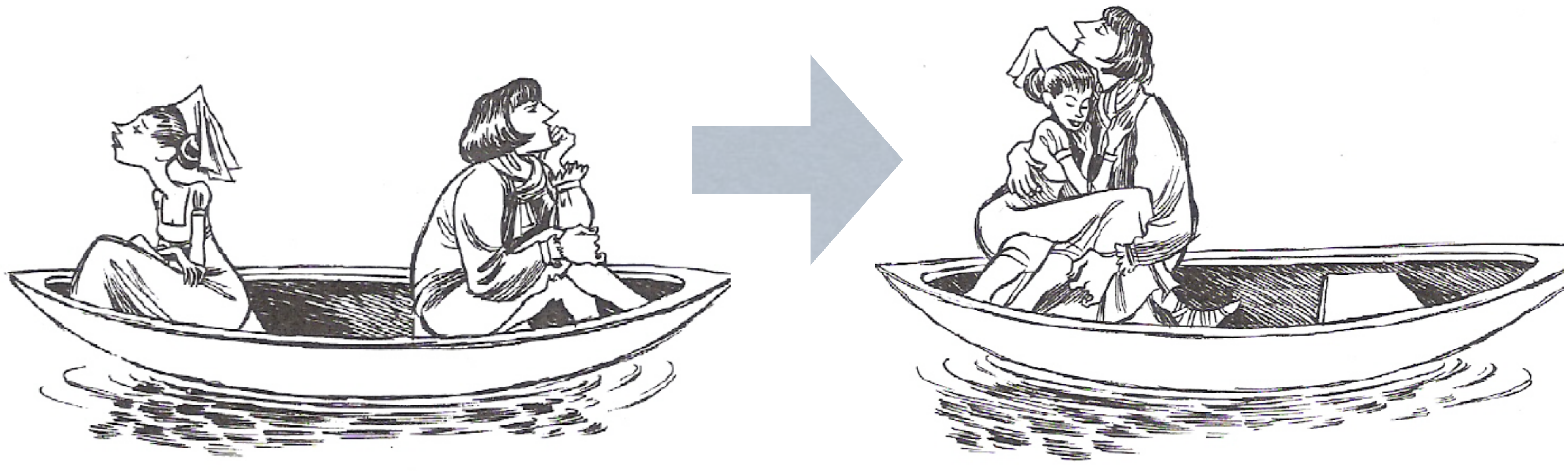
där $f: X \times Y \to \mathbb{R}$ är en icke-negativ funktion

För en bra diskussion av omkastning av derivata och integral med användande av Lebesgueteori, se

http://planetmath.org/sites/default/files/texpdf/38599.pdf

Men…i allmänhet…

…att ta gränsvärden är subtilt och kräver eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk erfarenhet!



...singulärt gränsvärde!?!?!?