Introduktion till gruppteori

Matematisk fysik FTF13, 2017

- gruppaxiomen
- delgrupp, Abelsk/icke-Abelsk grupp
- symmetrigrupp (fysik!)
- permutationsgruppen

- Cayleys sats
- cykliska gruppen C_n, diedergruppen D_n
- ekvivalensrelation, ekvivalensklass
- konjugering, konjugatklass
- sidoklass
- Lagranges teorem
- kvotmängd G/H, kvotgrupp

Evariste Galois, 1811-1832

Introduktion till gruppteori

Matematisk fysik FTF13, 2017

- gruppaxiomen
- delgrupp, Abelsk/icke-Abelsk grupp
- symmetrigrupp (fysik!)
- permutationsgruppen

- Cayleys sats
- cykliska gruppen C_n, diedergruppen D_n
- **ekvivalensrelation**, **ekvivalensklass**
- konjugering, konjugatklass
- sidoklass
- Lagranges teorem
- kvotmängd G/H, kvotgrupp

Evariste Galois, 1811-1832

tillämpning också i topologi

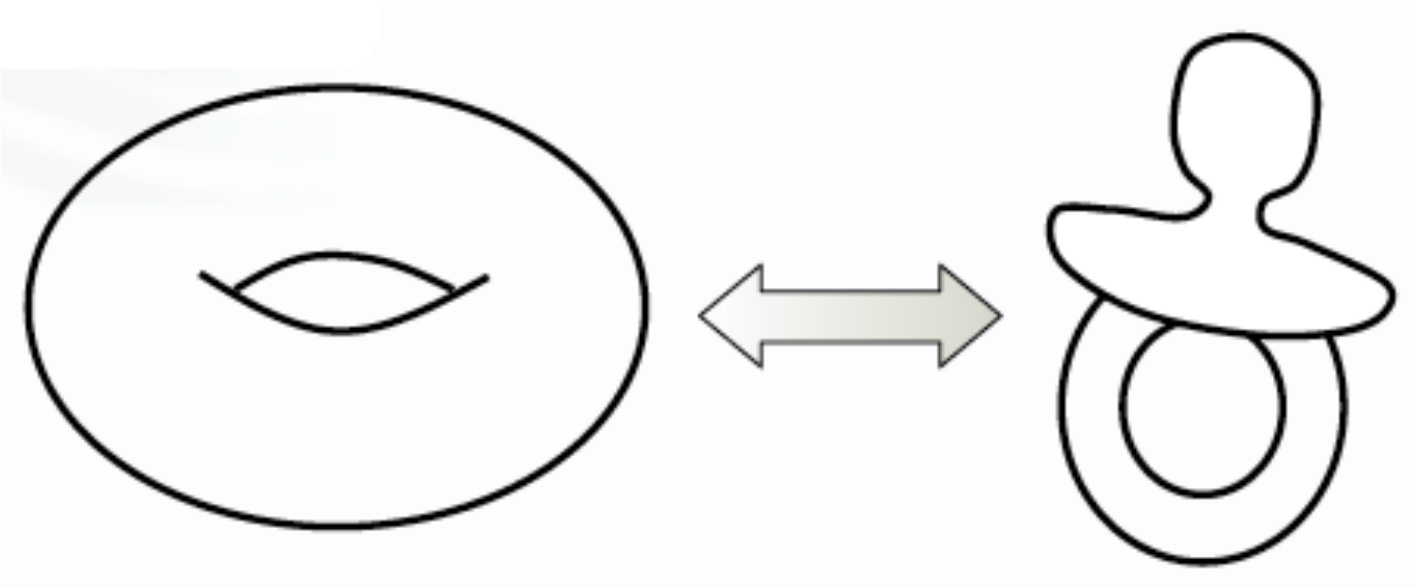
Topologi: en 3 min snabbkurs

Topologi: en 3 min snabbkurs

Fråga: Vad *är* topologi?

Svar: En gren av matematiken som studerar egenskaper hos former som inte ändras under *kontinuerliga deformationer*

”klämma och dra”: OK
”klippa eller klistra”: ej OK



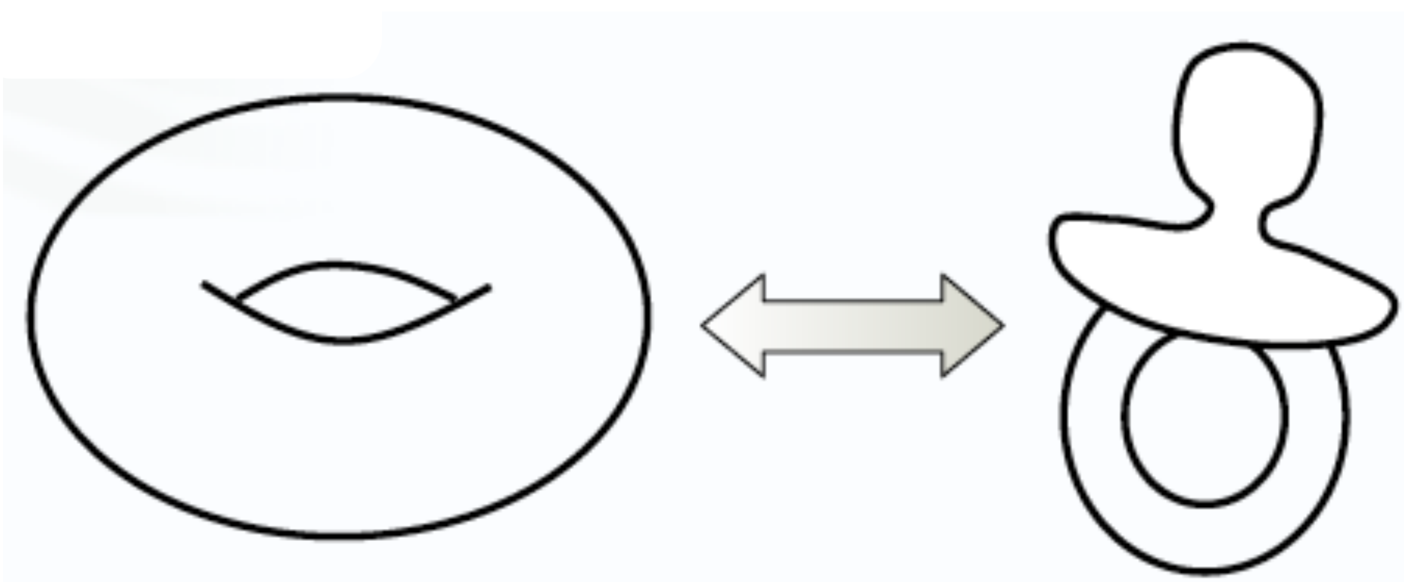
Topologi: en 3min snabbkurs

Fråga: Vad är topologi?

Svar: En gren av matematiken som studerar egenskaper hos former som inte ändras under *kontinuerliga deformationer*

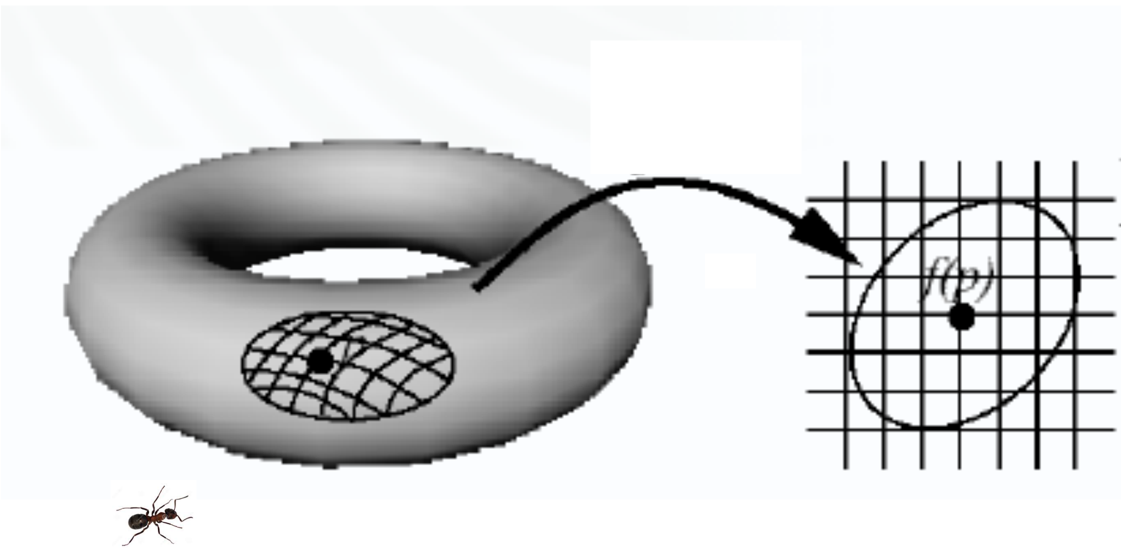
"topologisk invariant"

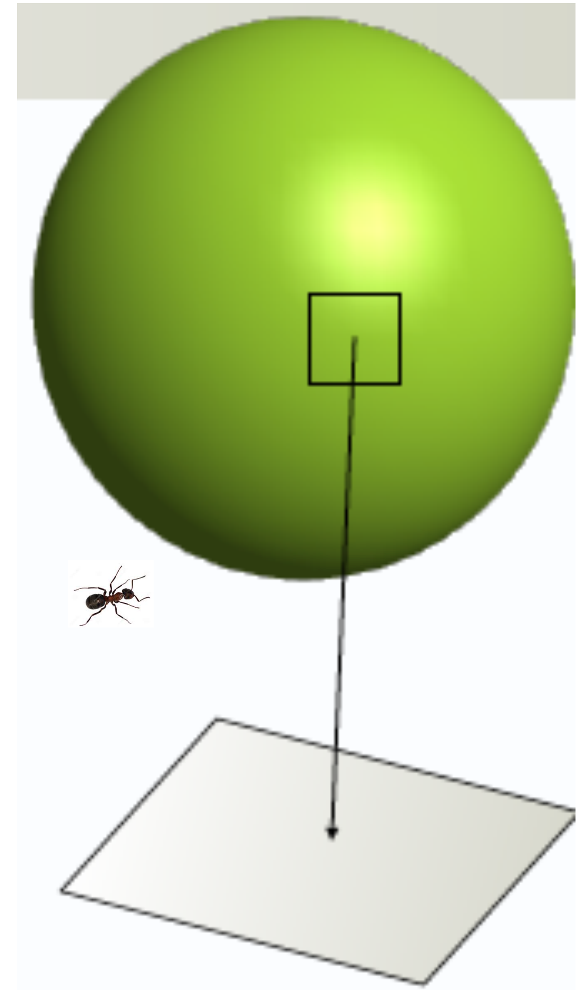
”klämma och dra”: OK
”klippa eller klistra”: ej OK



Ex: # hål "n"
(här: n=1)

Topologi: en 3 min snabbkurs





Topologiska invarianter är **heltal** som karakteriserar **globala egenskaper** hos former

”Form” kan generaliseras till mer komplexa begrepp,
t.ex. (i fysiken): ”mångfald av kvantmekaniska tillstånd”

Nobelpriset i fysik 2016

David J. Thouless
University of Washington, USA

F. Duncan M. Haldane
Princeton University, USA

J. Michael Kosterlitz
Brown University, USA

"för teoretiska upptäckter av topologiska fasövergångar och topologiska materiefaser"

NICK STOCKTON SCIENCE 10.04.16 2:59 PM

NOBEL PRIZE IN PHYSICS GOES TO ANOTHER WEIRD THING NOBODY UNDERSTANDS

Nobel physics prize awarded to three for topology work

October 4, 2016 by Karl Ritter

SVENSKA DAGBLADET

Sverige

”Hur kan en kanelbulle förvandlas till kaffekopp?”

Årets Nobelpris i fysik tilldelas tre britter för forskning om exotisk materia i kvantvärlden.

2016 Nobel Prize in Physics: The Revelation of Topological Phases of Matter

Research used to guide light around sharp corners; photonic transitions for enabling future quantum computation and nanosciences

The New York Times | https://nyti.ms/2dANF49

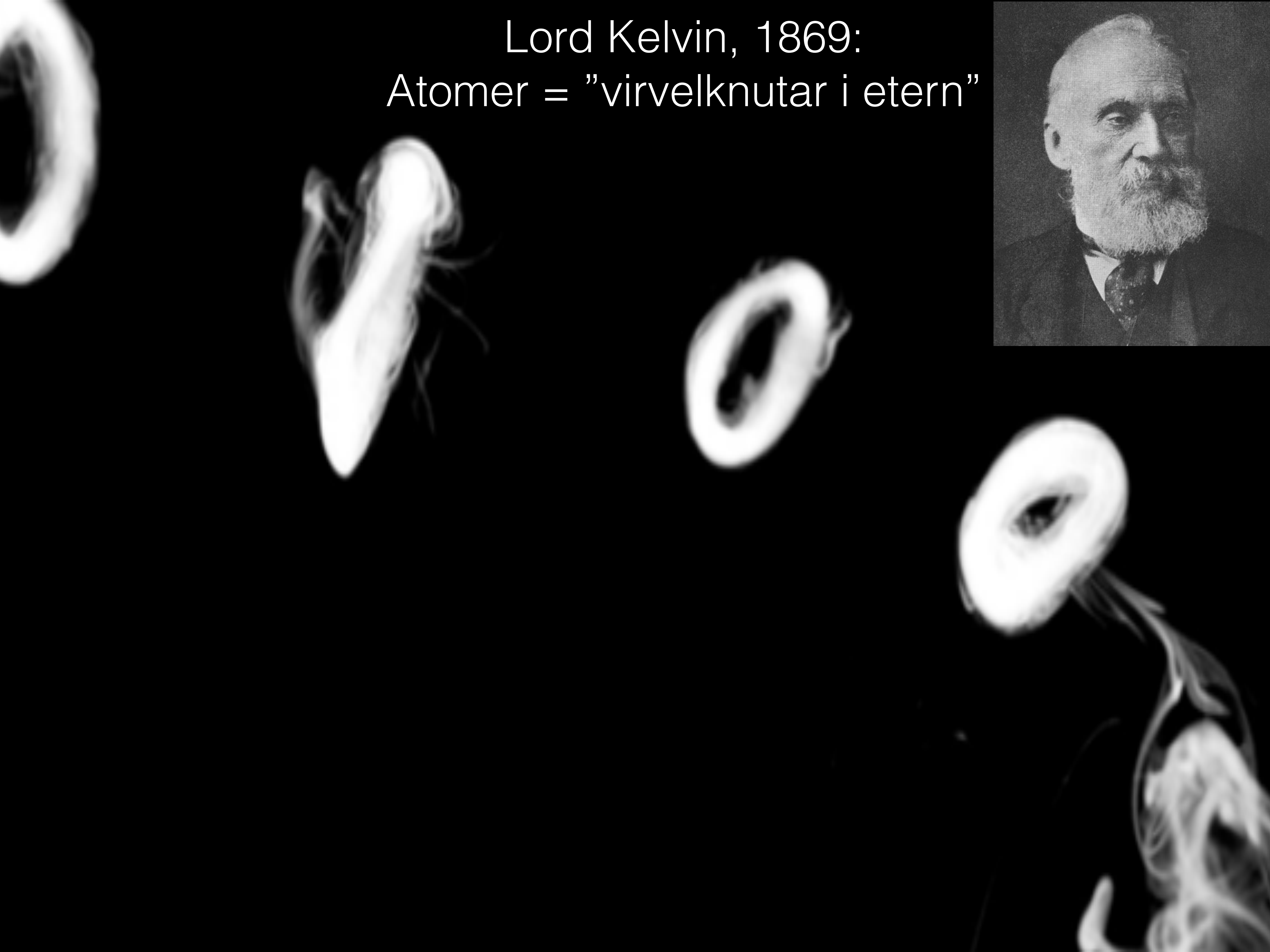
SCIENCE

3 Who Studied Unusual States of Matter Win Nobel Prize in Physics

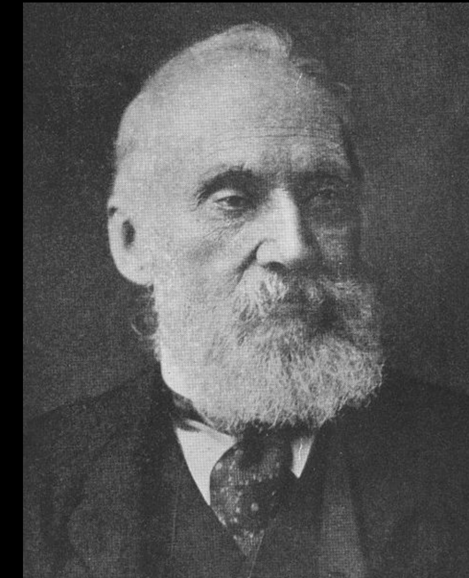
By DENNIS OVERBYE and SEWELL CHAN OCT. 4, 2016

Three physicists born in Britain but now working in the United States were awarded the Nobel Prize in Physics on Tuesday for research into the bizarre properties of matter in extreme states, including superconductors, superfluids and thin magnetic films.

Lord Kelvin, 1869:
Atomer = ”virvelknutar i etern”



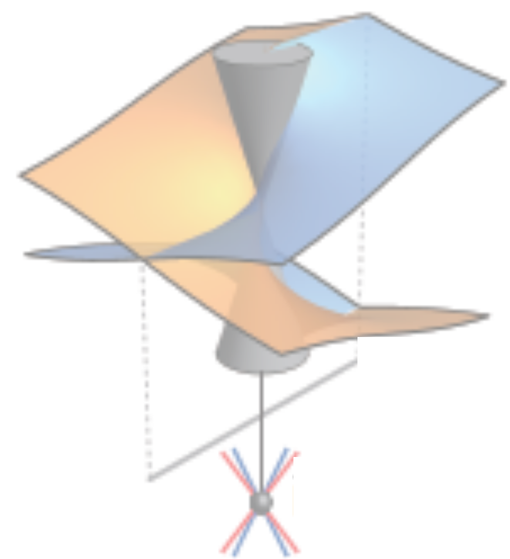
Lord Kelvin, 1869:
Atomer = ”virvelknutar i etern”



Peter Tait, 1880:
Klassificering av möjliga knutar;
tidig inspiration för *algebraisk topologi*

Växelbruket mellan fysik och topologi har en lång historia…

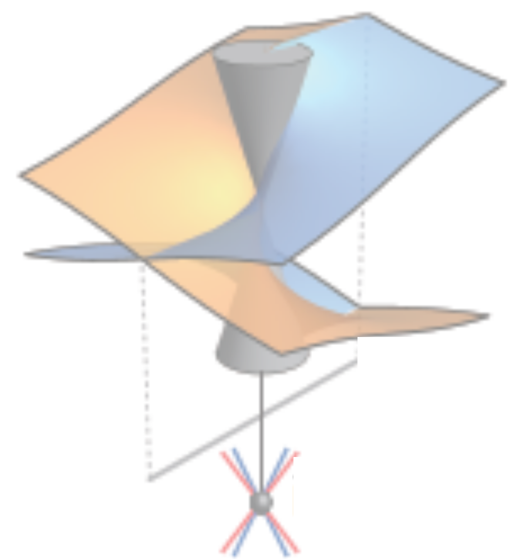
Magnetiska monopoler, Dirac 1911
Kvantiserade virvlar i supraflytande helium, Onsager 1949
Topologiska faser i kvantmekaniken, Aharonov & Bohm 1959
Gravitationell kollaps och rum-tid singulariteter, Penrose-Hawking 1965



Växelbruket mellan fysik och topologi har en lång historia…

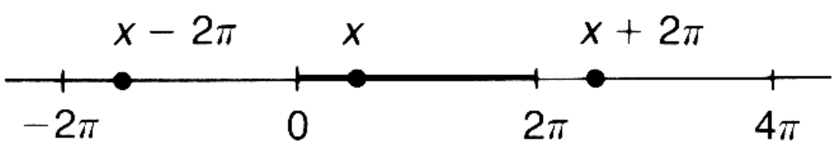
Magnetiska monopoler, Dirac 1911
Kvantiserade virvlar i supraflytande helium, Onsager 1949
Topologiska faser i kvantmekaniken, Aharonov & Bohm 1959
Gravitationell kollaps och rum-tid singulariteter, Penrose-Hawking 1965
Topologiska fasövergångar, Kosterlitz & Thoules 1973
Topologiska materiefaser, Thouless, Kohmoto, Nightingale, den Nijs 1982
Symmetriskyddade topologiska faser, Haldane 1983
Gaugeteorier och fyrdimensionell topologi, Donaldson 1983
Topologisk kvantfältteori, Witten 1989

… och mycket mer!



Vi kan använda **ekvivalensrelationer** till att konstruera **topologiska mångfalder**

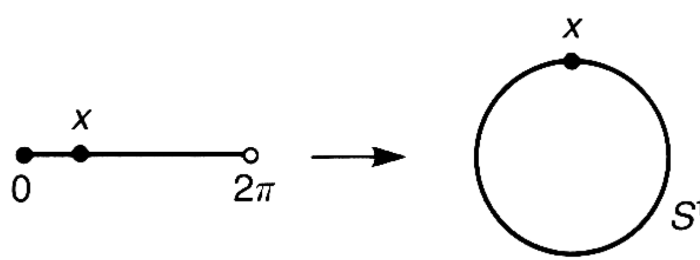
Exempel: givet ***R***, definiera en **ekvivalensrelation** $x \sim y$: $y = x + 2\pi n$



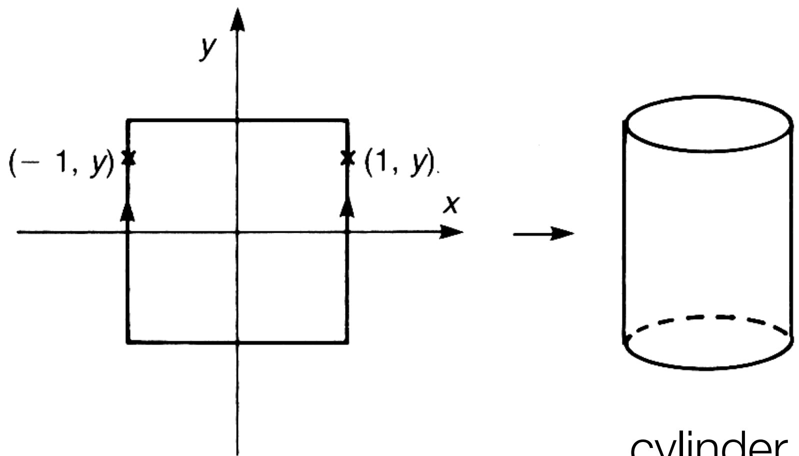
ekvivalensklasser: $(x) = \{\ldots, x - 2\pi, x, x + 2\pi, x + 4\pi, \ldots\}$

kvotmängden R/~ består av alla ekvivalensklasser (x)

motsvarande topologiska mångfald kallas **kvotrum**

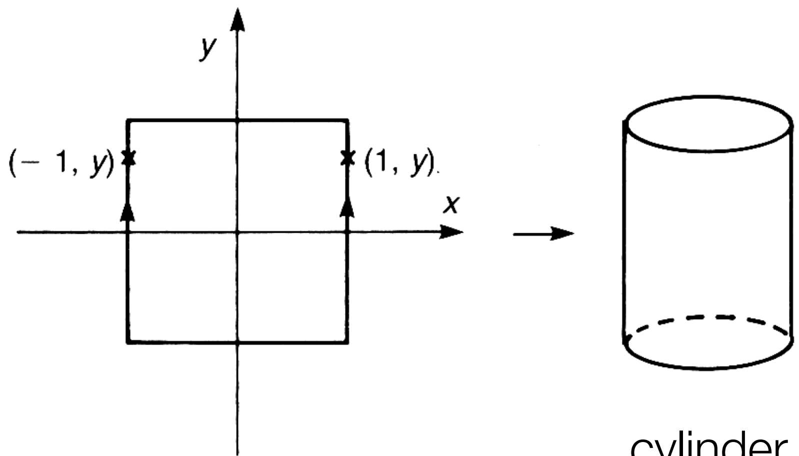


Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

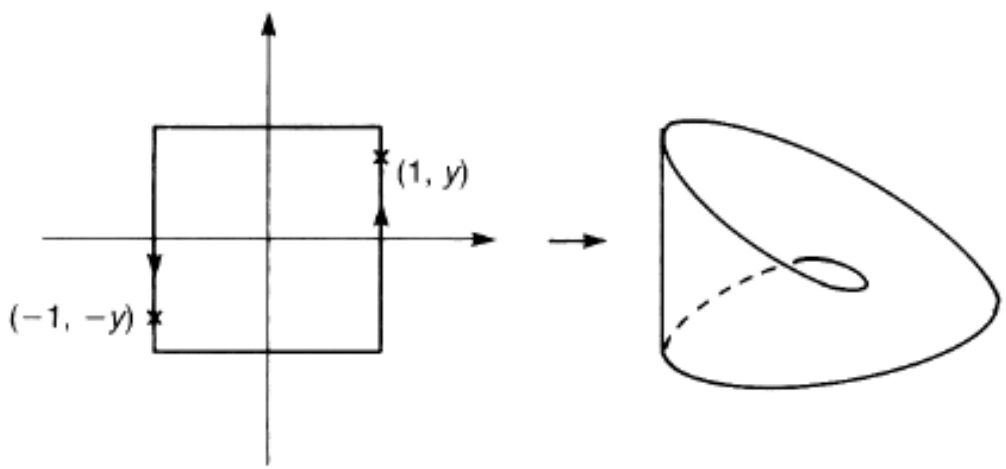


cylinder, orienterbar

Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

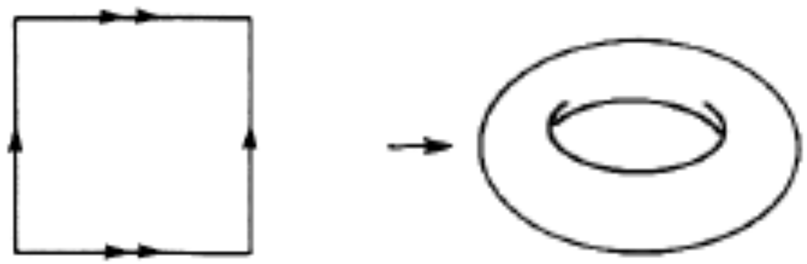


cylinder, orienterbar



Möbiusband, ej orienterbar

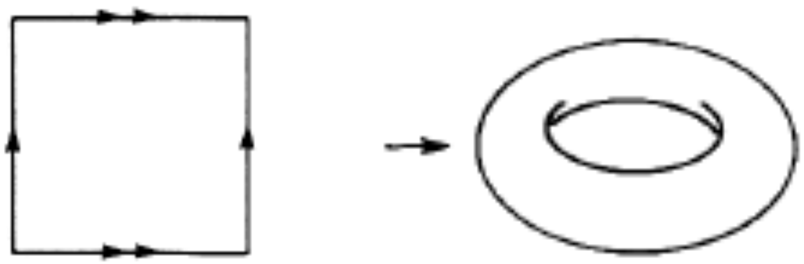
Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:



$(-1,y) \sim (1,y)$
$(x,-1) \sim (x,1)$

torus

Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer**
för att konstruera **topologiska mångfalder**:

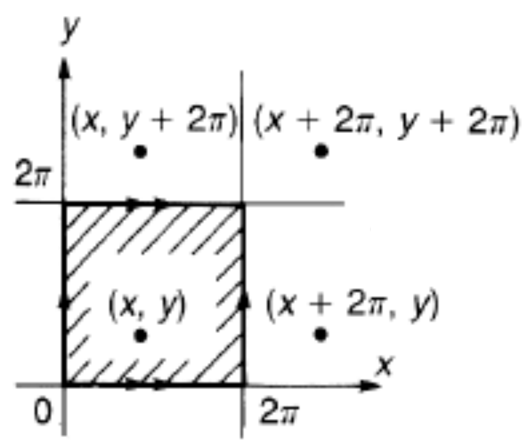


$(-1,y) \sim (1,y)$
$(x,-1) \sim (x,1)$

torus

kan också betraktas som **kvotrummet** $\boldsymbol{R}^2/\sim$ med ekvivalensrelationen

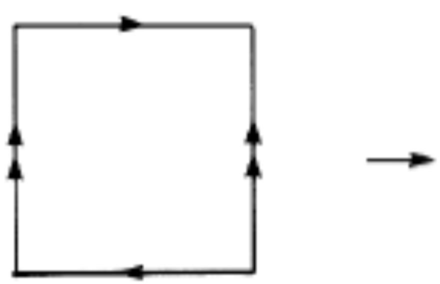
$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ if } x_2 = x_1 + 2\pi n_x \text{ and } y_2 = y_1 + 2\pi n_y$$



Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

torus

$(-1,y) \sim (1,y)$
$(x,-1) \sim (x,1)$



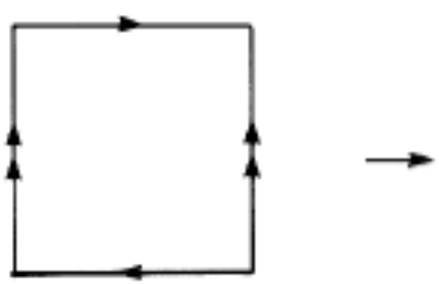
?

$(-1,y) \sim (1,y)$
$(-x,-1) \sim (x,1)$

Andra sätt att använda **ekvivalensrelationer** för att konstruera **topologiska mångfalder**:

$(-1,y) \sim (1,y)$
$(x,-1) \sim (x,1)$

torus

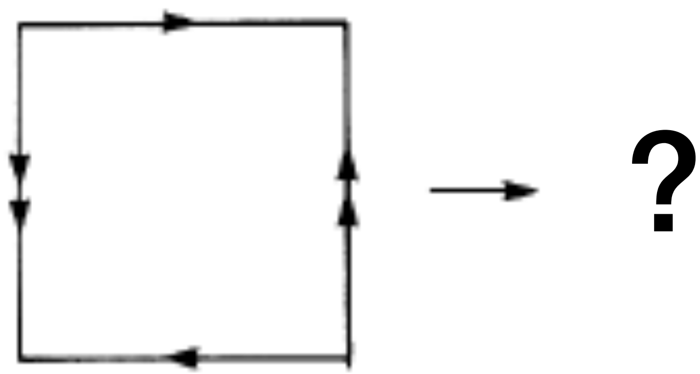


?

https://www.youtube.com/watch?v=yaeyNjUPVqs

!

$(-1,y) \sim (1,y)$
$(-x,-1) \sim (x,1)$



$(-1,-y) \sim (1,y)$
$(-x,-1) \sim (x,1)$