

Introduktion till representationsteori

Matematisk fysik FTF13, 2017

$$G = \{ g_1, g_2, \dots, g_{|G|} \}$$



homomorfi
(bevarar gruppstrukturen)

$$g_i g_j = g_k \Rightarrow D(g_i) D(g_j) = D(g_k)$$

$$D = \{ D(g_1), D(g_2), \dots, D(g_{|G|}) \}$$

$D(g_i)$ $n \times n$ kvadratiska matriser $\rightarrow$ n -dim rep

Vektorrummet $\mathcal{V}$ i vilket $D(g_i)$ verkar kallas G -modul

Om varje grupp-element g_i representeras av en *unik* matris $D(g_i)$ så kallas D en *trogen* rep

Varje grupp G har en trivial rep där $D(g_i) = \mathbf{1}$ för alla g_i



Ferdinand Frobenius, 1849-1917

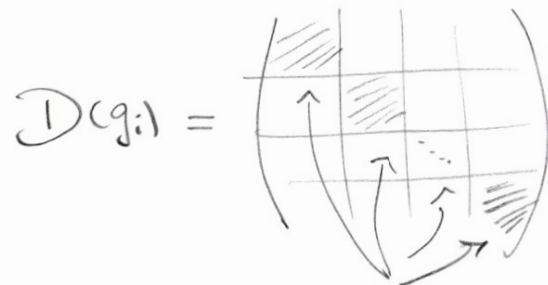
Centralt problem i fysiken:

Givet en rep av en symmetrigrupp,
vilka är de *irreps* som bygger upp den?



svarar mot de "fundamentala" / "relevanta"
frihetsgraderna i det system man studerar

(Fullständigt) reducerbar rep:
alla matriser har blockdiagonal form



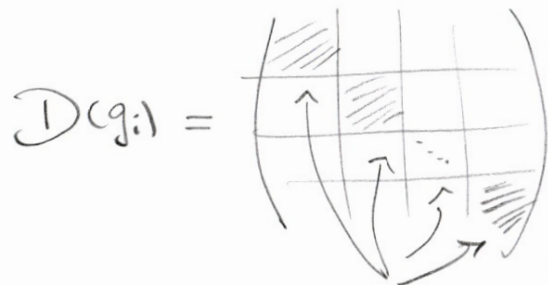
IRREPS
(kan inte brytas ner på
blockdiagonal form)

Centralt problem i fysiken:

Givet en rep av en symmetrigrupp,
vilka är de *irreps* som bygger upp den?

↑
svarar mot de "fundamentala" / "relevanta"
frihetsgraderna i det system man studerar

(Fullständigt) reducerbar rep:
alla matriser har blockdiagonal form



IRREPS

(kan inte brytas ner på
blockdiagonal form)

INFÖR GRUPPINVARIANT
SKÄLÄRPRODUKT

$$\{\vec{u}, \vec{v}\} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (D(g)\vec{u}, D(g)\vec{v})$$



Enligt *Maschkes teorem* kan alla reps göras ekvivalenta med en unitär rep.
Det följer att *alla reducerbara reps är fullständigt reducerbara*.

Viktiga satser:

II. Schurs första lemma

$$\begin{aligned} D \text{ irrep till } G : BD(g) &= D(g)B, \forall g \in G \\ \Rightarrow B &= \lambda \mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

II. Schurs andra lemma

$$\begin{aligned} D, D' \text{ inekvivalenta irreps : } BD(g) &= D'(g)B, \forall g \in G \\ \Rightarrow B &= 0 \end{aligned}$$

III. Fundamentala ortogonalitetsteoremet

Givet G och inekvivalenta irreps $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots$:

$$\sum_{g \in G} (D_{\alpha\beta}^{(i)}(g))^* D_{\gamma\delta}^{(j)}(g) = \frac{|G|}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}$$

$\uparrow$ $\dim$ av $D^{(i)}$



John von Neumann tipsade Eugene Wigner om Schurs lemmor för analys av kvantmekaniska spektra. Första tillämpningen av grupp-och representationsteori i kvantmekaniken!

I. Schurs första lemma

$$D \text{ irrep till } G : BD(g) = D(g)B, \forall g \in G \\ \Rightarrow B = \lambda 11, \lambda \in \mathbb{C}$$

Bevis Låt U vara en G -modul, med $D(g) : U \rightarrow U$ en irrep.

Betrakta $B : U \rightarrow U$.

Antag att $B\vec{b} = \lambda\vec{b}$, dvs $\vec{b}$ är en egenvektor till B .

$$\text{Enl. antagande} \Rightarrow B(D(g)\vec{b}) = D(g)B\vec{b} = D(g)\lambda\vec{b} = \lambda(D(g)\vec{b})$$

$\Rightarrow D(g)\vec{b}$ är också en egenvektor till B (med samma egenvärde λ)

Bilda $\Gamma = \{ \text{EGENVEKTORER TILL } B \text{ MED EGENVÄRDE } \lambda \}$

Det följer att $D(g) : \Gamma \rightarrow \Gamma$, dvs. Γ är en G -modul!

Men D är en irrep $\Rightarrow U$ kan inte ha äkta delmoduler.

$$\Rightarrow \Gamma = U, \text{ dvs. } B\vec{u} = \lambda\vec{u} \quad \forall \vec{u} \in U \Rightarrow B = \underbrace{\lambda 11}_{\text{VS } B}$$

III. Fundamentala ortogonalitetsteoremet

Givet G och inekvivalenta irreps $D^{(1)}, D^{(2)}, \dots$:

$$\sum_{g \in G} (D_{\alpha\beta}^{(i)}(g))^* D_{\gamma\delta}^{(j)}(g) = \frac{[G]}{n_i} \delta_{ij} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta}$$

$\uparrow$ dim av $D^{(i)}$

