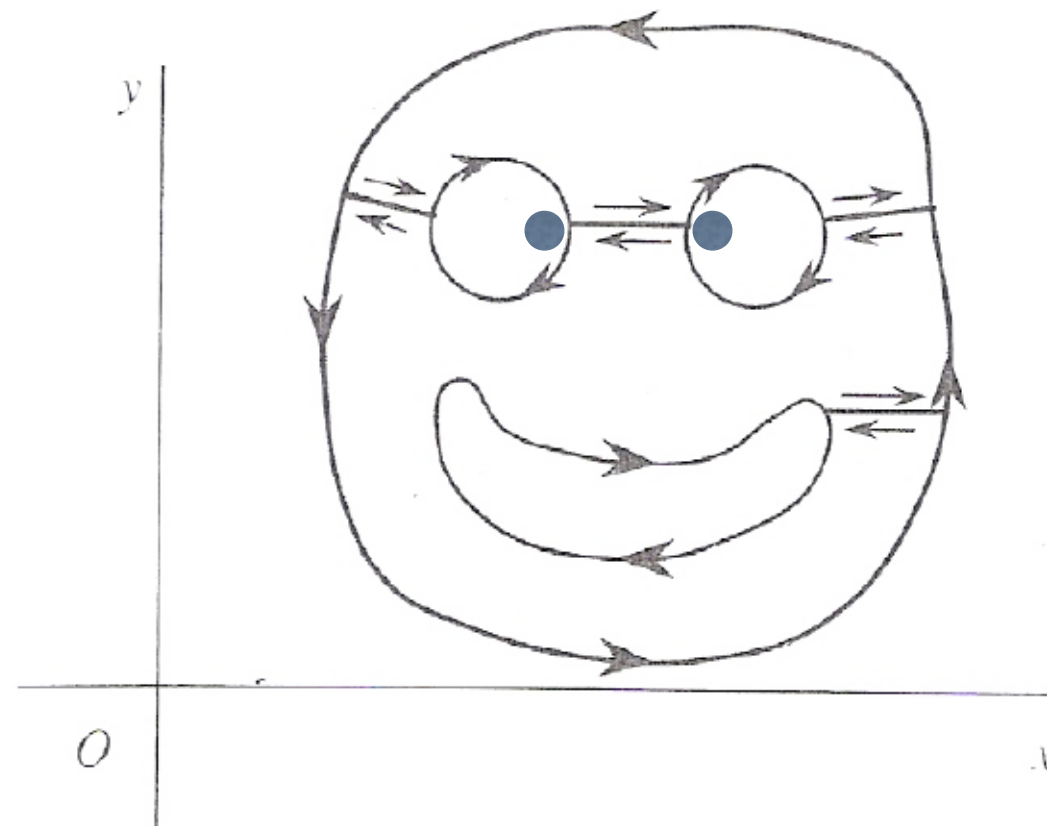


förskräckliga integraler...



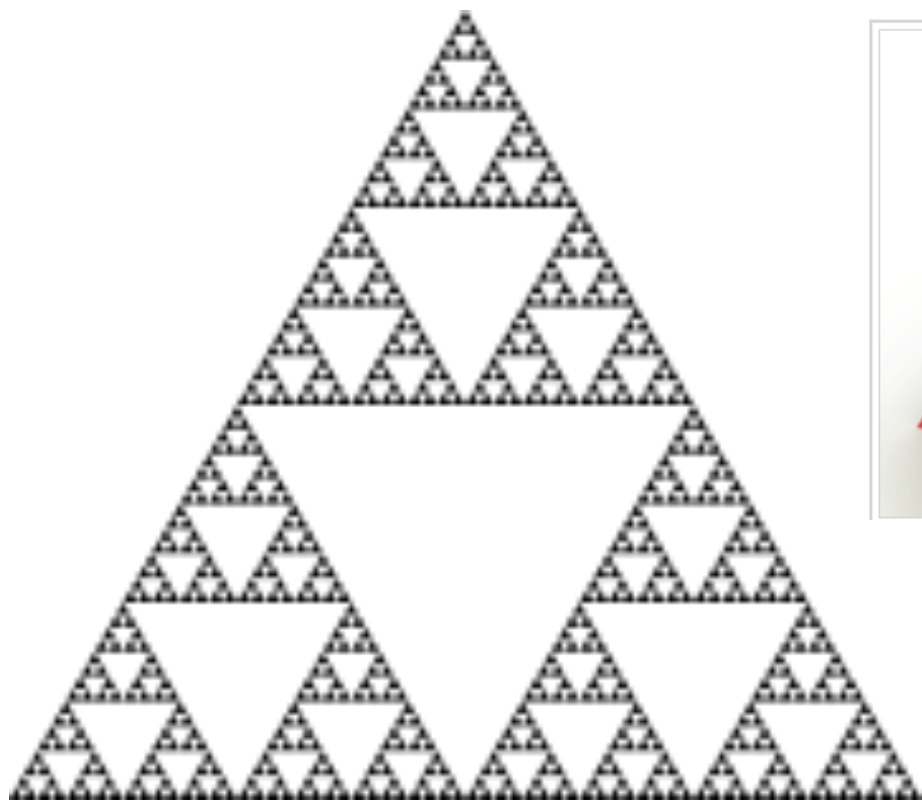
Matematisk fysik 2018
Föreläsning 8

Hur integrera ***verkligt* komplicerade funktioner**, t.ex. funktioner som beskriver en

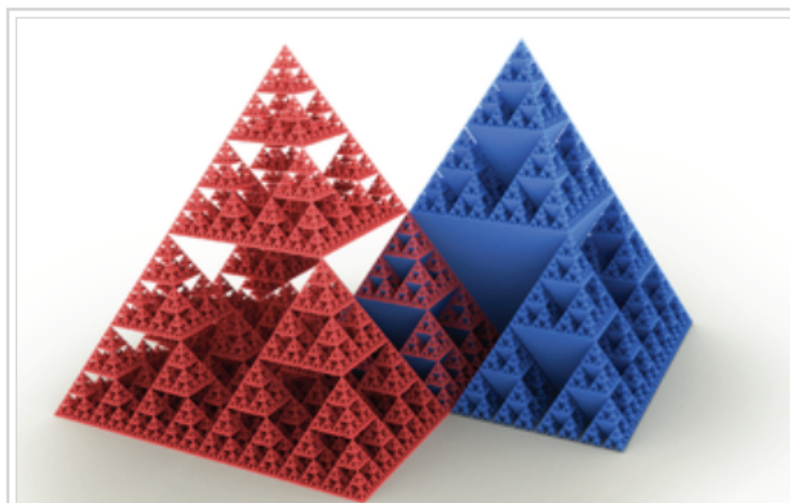
FRAKTAL eller är definierade på en **FRAKTAL?**

Hur integrera *verkligt* komplicerade funktioner, t.ex. funktioner som beskriver en

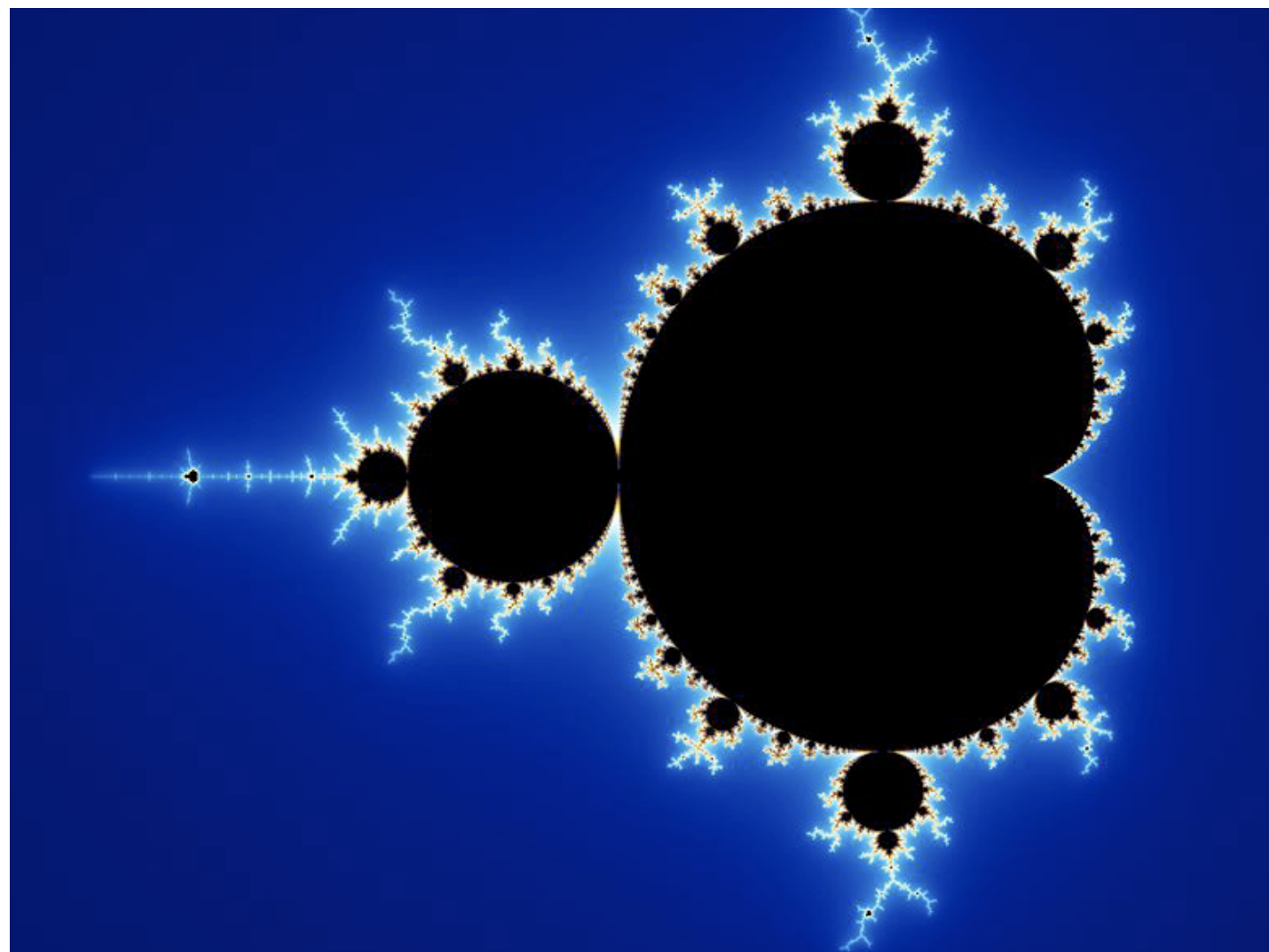
FRAKTAL eller är definierade på en **FRAKTAL**?



Sierpinski's triangel



Mandelbrotmängd

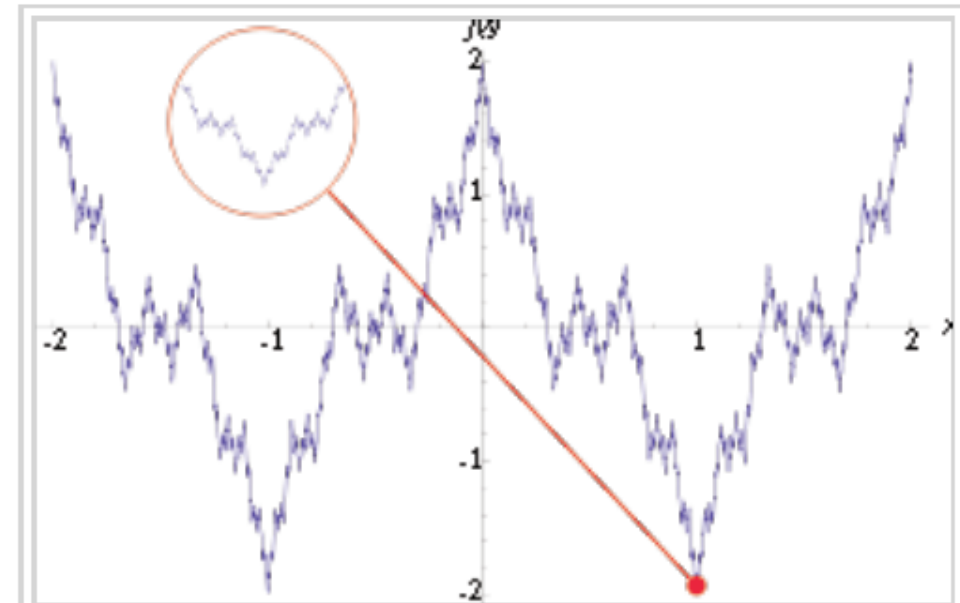


Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

Karl Weierstrass

...kontinuerlig funktion som inte är deriverbar någonstans!

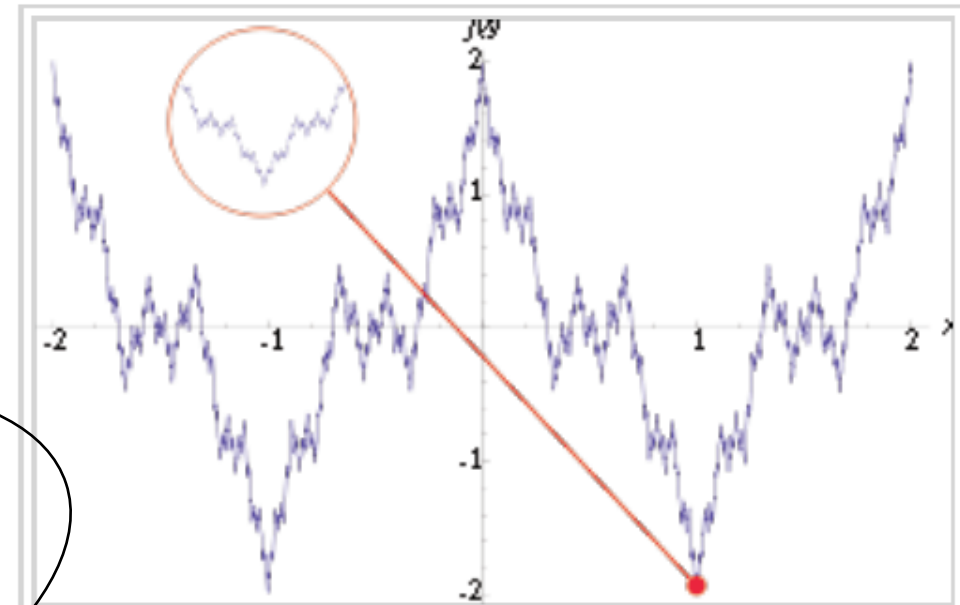


Plot of Weierstrass Function over the interval $[-2, 2]$. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.

Weierstrassfunktionen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \quad ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$$

...ett patologiskt monster!
...ovärdigt matematiken!

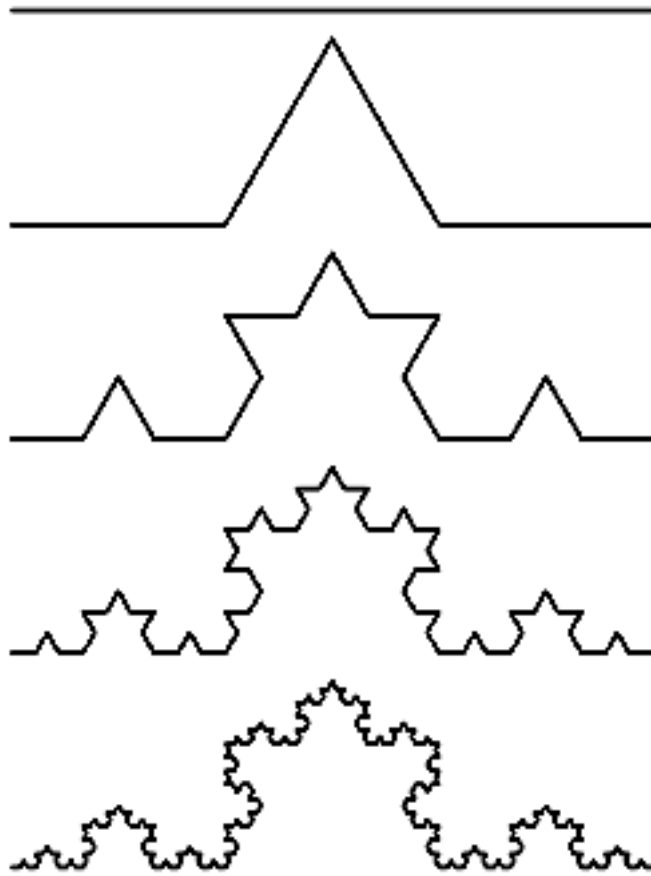


Plot of Weierstrass Function over the interval $[-2, 2]$. Like fractals, the function exhibits self-similarity: every zoom (red circle) is similar to the global plot.



Charles Hermite, omkring 1887

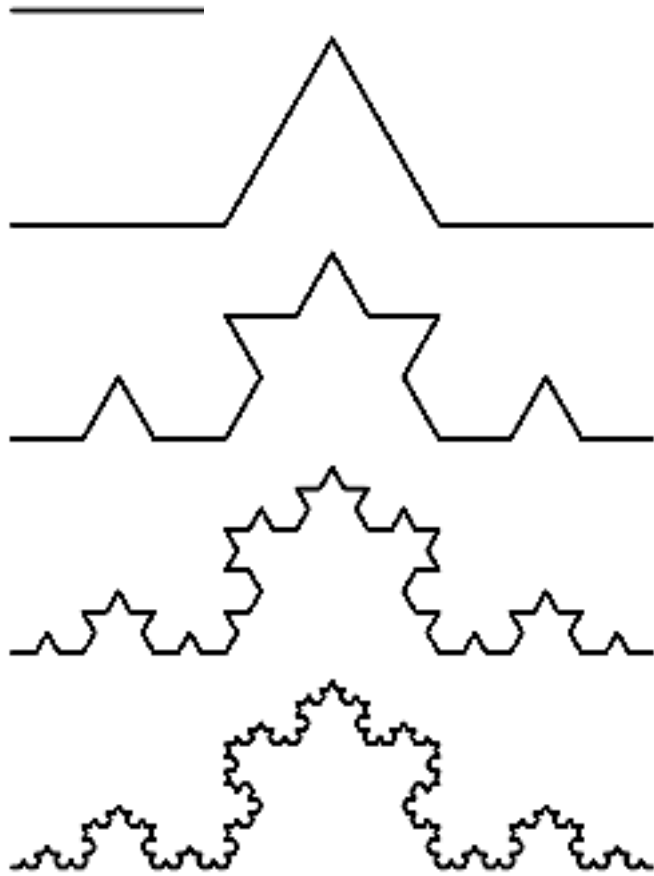
Kochkurva



1. Tag en linje.
2. Dela linjen i tre lika stora delar.
3. Gör ~~en kopia~~ ^{två kopior} av den mellersta delen.
4. Sätt upp de två kopiorna i vinkel mot varandra så att de får plats inom samma sträcka som en ensam linje annars gör.
5. Upprepa (iterera) från steg 2 för alla de nya linjer som uppkommit av operationen.

<http://www.youtube.com/watch?v=JdMgvSWSKZI>

Kochkurva



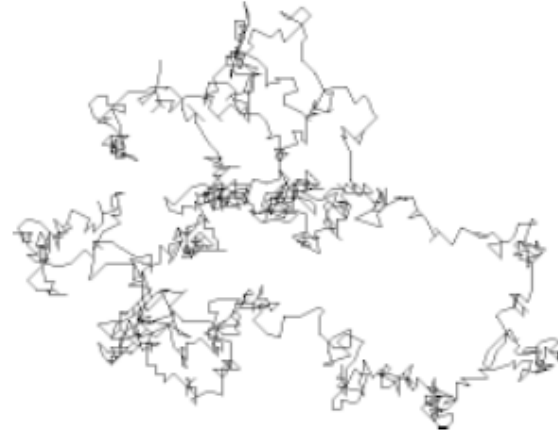
Hausdorff-dimension

$$D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26$$

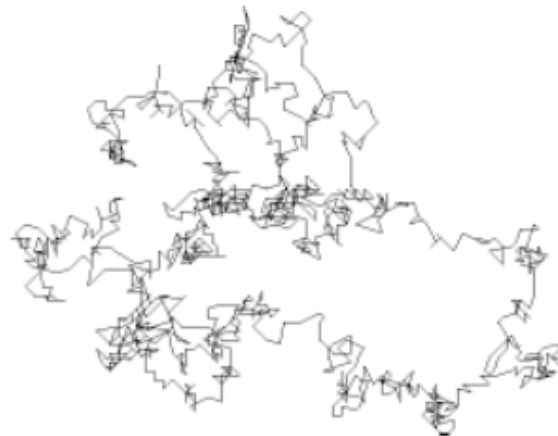
Brownsk rörelse (datoranimerad)



Length=8747, Step=16



Length=12091, Step=8

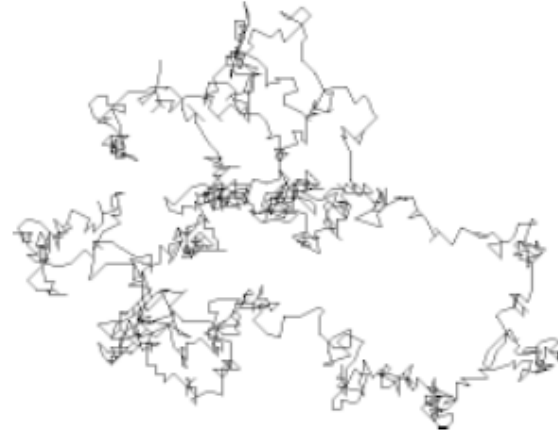


Length=17453, Step=4

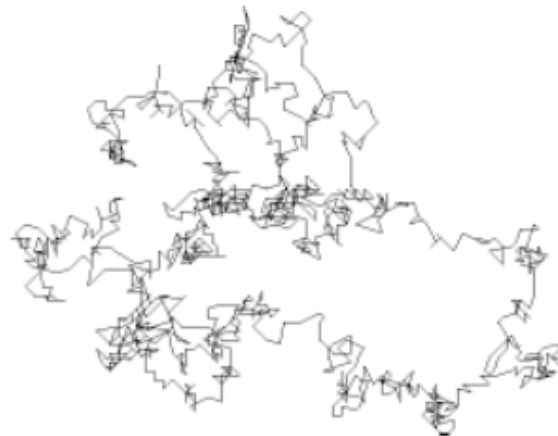
Brownsk rörelse (datoranimererad)



Length=8747, Step=16



Length=12091, Step=8



Length=17453, Step=4

Fysiktillämpning:

Integrera över en funktion som beskriver statistiskt viktade "Brownska rörelser" i gränsen av en infinitesimalt kort steglängd

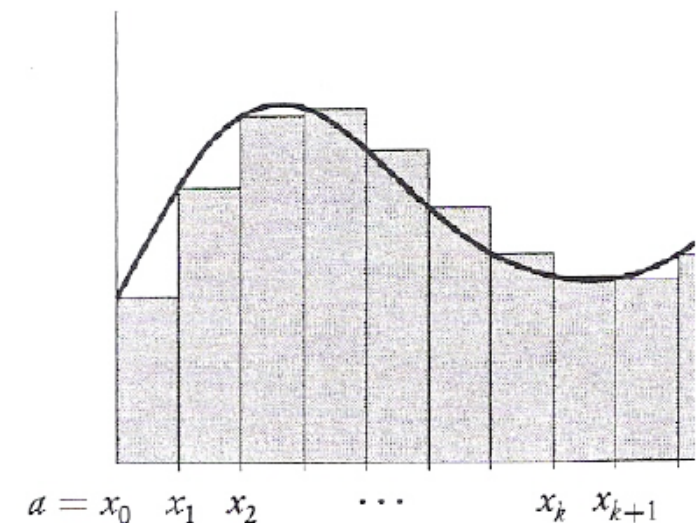


Bernhard Riemann, 1826 - 1866

RIEMANN-INTEGRAL

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig

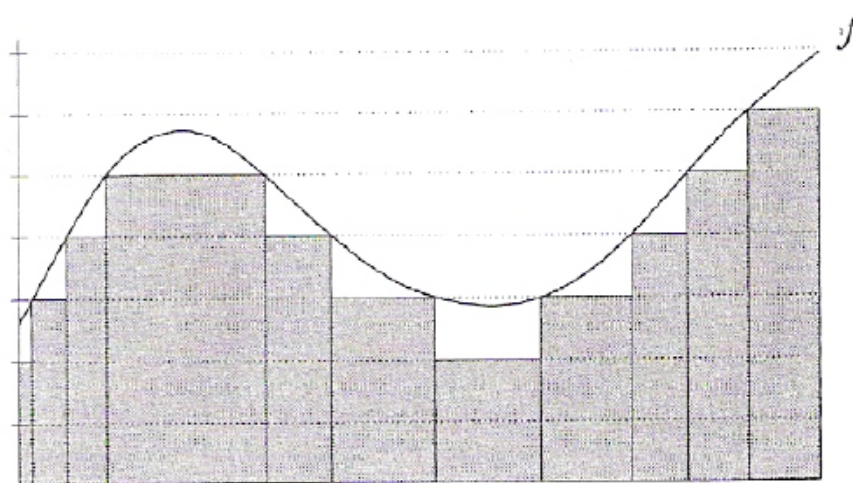


LEBESGUE-INTEGRAL

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

$$A_k^{(n)} = f^{-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right)$$

μ Lebesguemått



$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mätbar funktion



Henri Lebesgue, 1875 - 1941

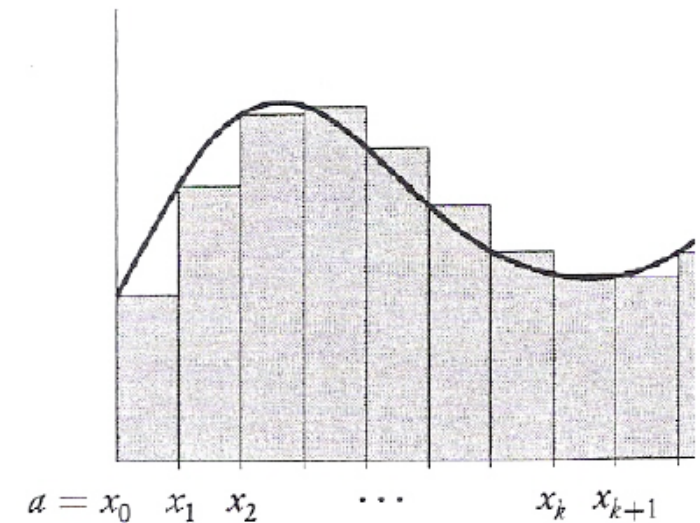
Integraler och gränsvärden?

(derivator, serier, andra integraler,...)

RIEMANN-INTEGRAL

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ styckvis kontinuerlig

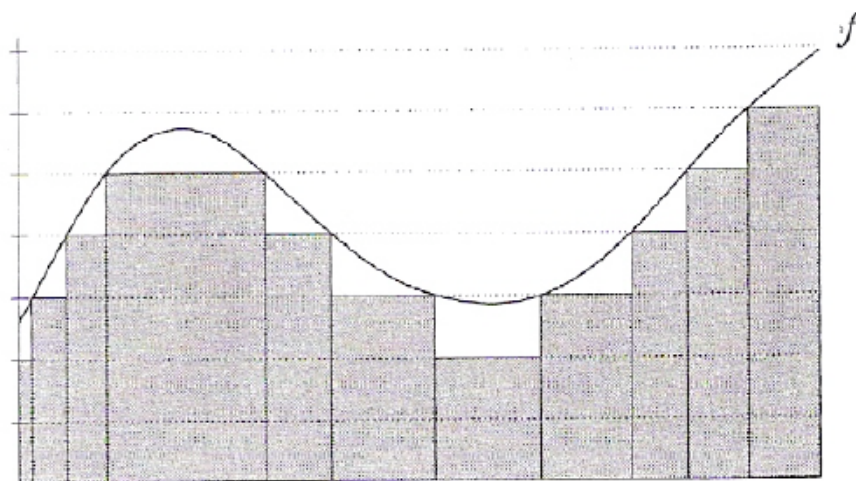


LEBESGUE-INTEGRAL

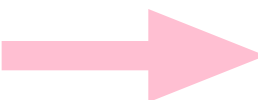
$$\int_a^b f(x)dx \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \mu(A_k^{(n)}) \cdot \frac{k}{2^n}$$

$$A_k^{(n)} = f^{-1} \left(\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right] \right)$$

μ Lebesguemått



$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mätbar funktion



Lebesgues (dominerade) konvergensteorem (lättversion)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, dx$$

om f_n konvergerar punktvis till f nästan överallt
och det existerar en Lebesgue-integrabel funktion
 g sådan att $|f_n| \leq g$ nästan överallt

Fubini (-Tonelli) teoremet (lättversion)

$$\int_X \left(\int_Y f(x, y) \, dy \right) dx = \int_Y \left(\int_X f(x, y) \, dx \right) dy$$

där $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ är en icke-negativ funktion

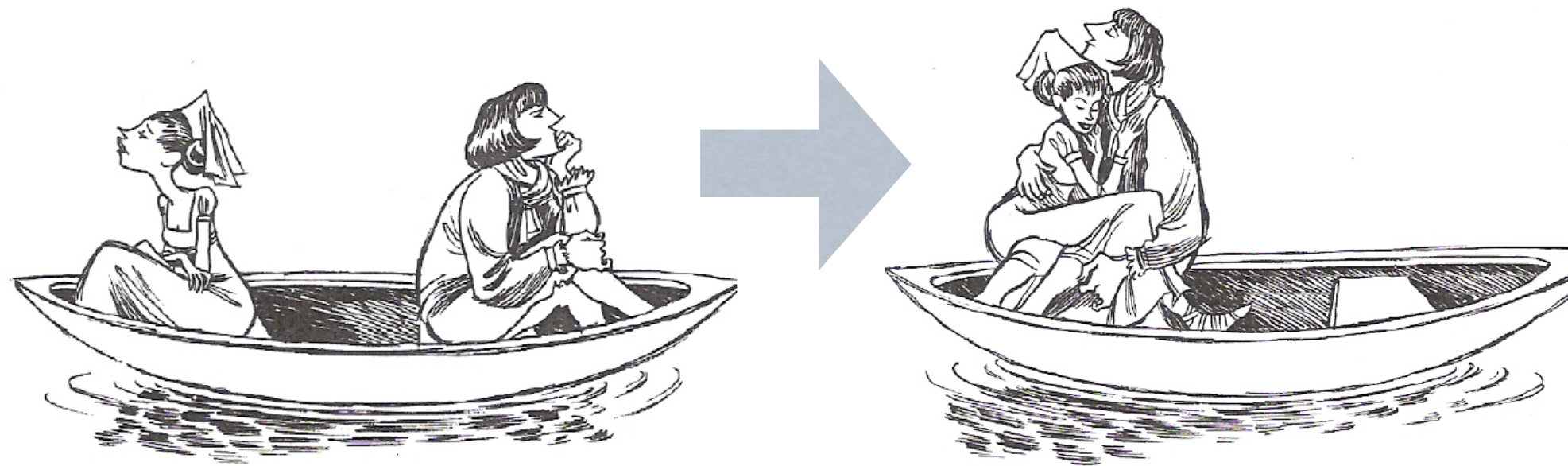
För en bra diskussion av omkastning av derivata och integral med användande av Lebesgueteori, se

http://www.wikiwand.com/en/Leibniz_integral_rule#/Measure_theory_statement

Men...i allmänhet...

*...att ta gränsvärden är subtilt och kräver
eftertanke, fysikalisk intuition, och matematisk
erfarenhet!*





...singulärt gränsvärde!?!?!?