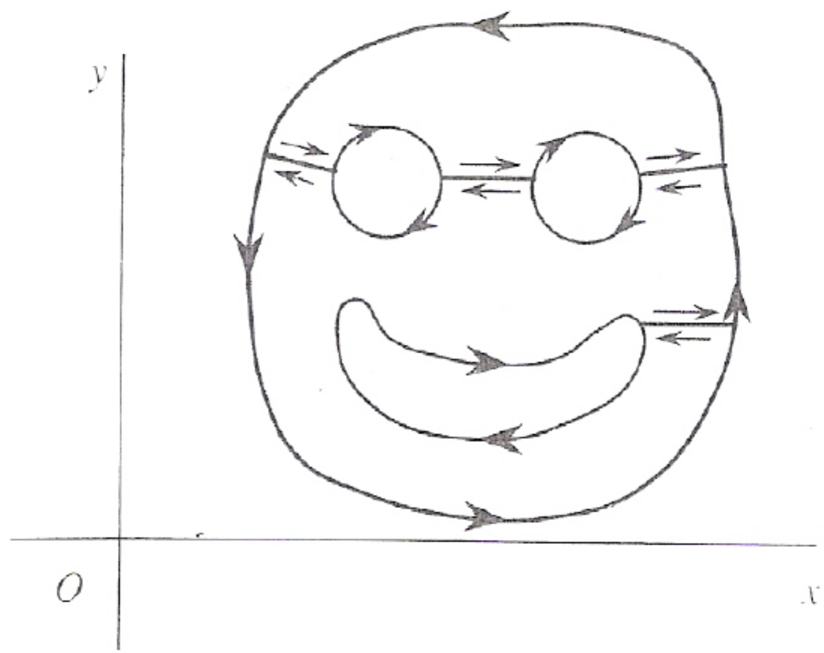
En paus från Greenfunktioner...

Residykalkyl:

Eleganta räkningar av förskräckliga integraler



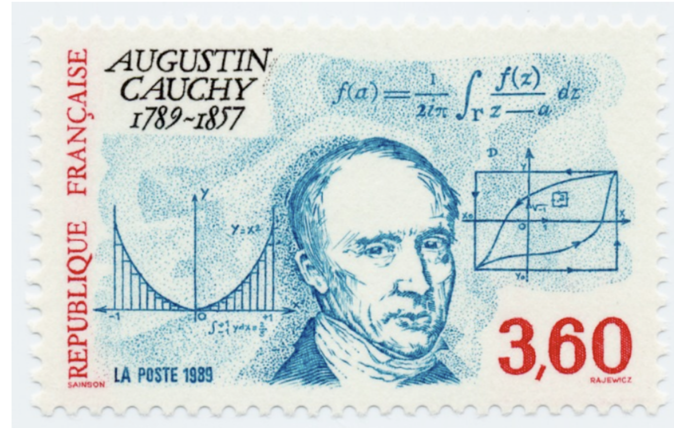
Matematisk fysik 2018

Föreläsning 2

Cauchys integralformel

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

f analytisk på och innanför C (inneslutande z_0)



Analogi: Laplaces ekvation + randvärdesvillkor bestämmer unikt en elektrostatisk potential

Laurentserie

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

f analytisk på en ring $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Singulariteter

"Borttagbara" singulariteter $$f(z) = \frac{4z^2 - 1}{2z + 1}$$ (exempel)

Essentiella singulariteter $$f(z) = e^{1/z}$$ (exempel)

oändligt många Laurenttermer med n<0

Pol av ordning **m** $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + ... + \frac{a_{-\mathbf{m}}}{(z - z_0)^{\mathbf{m}}}$$

$$a_{-1} = \text{Res}(f(z_0)) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} ((z - z_0)^m f(z))$$

Residyteoremet

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{m} \text{Res}\ (f(z_k))$$

C enkel, positivt orienterad kurva som innesluter de singulära punkterna $z_1, z_2, ...z_k$ till f

Vanligaste tillämpningen av residykalkyl i fysiken:
"komplexifierade" reella integraler

Användbart resultat:

Jordans lemma

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z)\,dz = 0$$

C_R halvcirkel med radien R i övre komplexa halvplanet

f går likformigt mot 0 snabbare än $1/|z|$ då $|z|\to\infty$

α icke-negativt reellt tal

Enkla typfall:

I. Integraler av rationella funktioner $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,dx \quad q(x)\neq 0$ för reella x

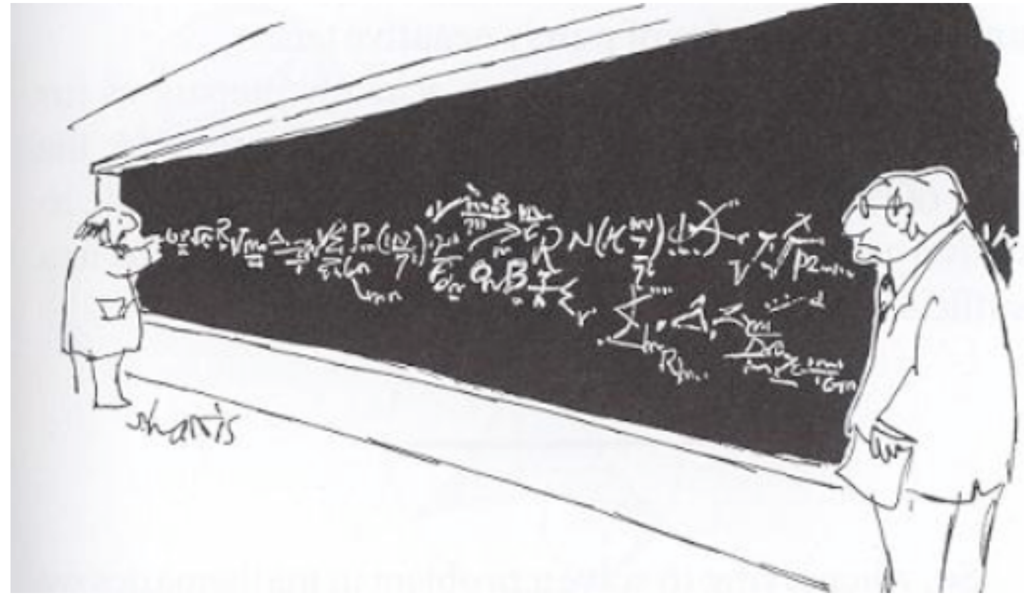
II. Integraler av produkter av rationella och trigonometriska funktioner $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\cos(ax)\,dx$ $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\sin(ax)\,dx$

$q(x)\neq 0$ för reella x, a reell

III. Integraler av trigonometriska funktioner på enhetscirkeln $\int_0^{2\pi}F(\sin\theta,\cos\theta)\,d\theta$

Men minst lika ofta i fysiken....

Förskräckliga integraler!



...kan fortfarande lösas elegant
med fiffig användning av residykalkyl!

Välj en smart kurva!

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax-bx^2}\,dx \qquad a,b\in\mathbb{R},\ b>0$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

... eller integrera längs ett snitt!

Multivärd komplex funktion [jfr. ln(z)!]

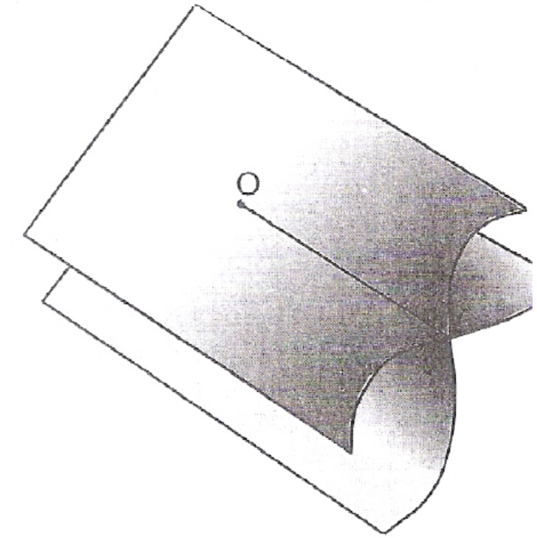
↓

sekvens av komplexa funktioner definierade i komplexa talplanet

↓

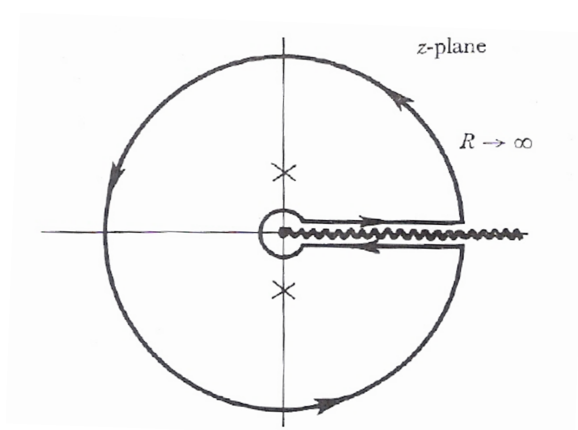
en enkelvärd komplex funktion definierad på en Riemannyta
[= Riemannblad ihopklistrade längs *grensnitt*]

sammanbinder två *grenpunkter*
(eller en grenpunkt med "punkten i oändligheten")

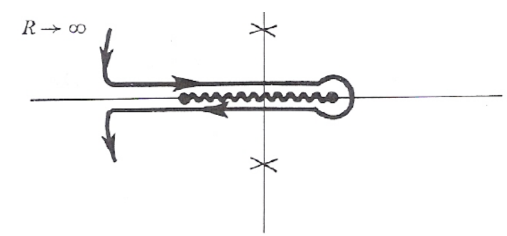


Riemannyta för funktionen $f(z) = z^{1/2}$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x^2}$$



$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2)}$$



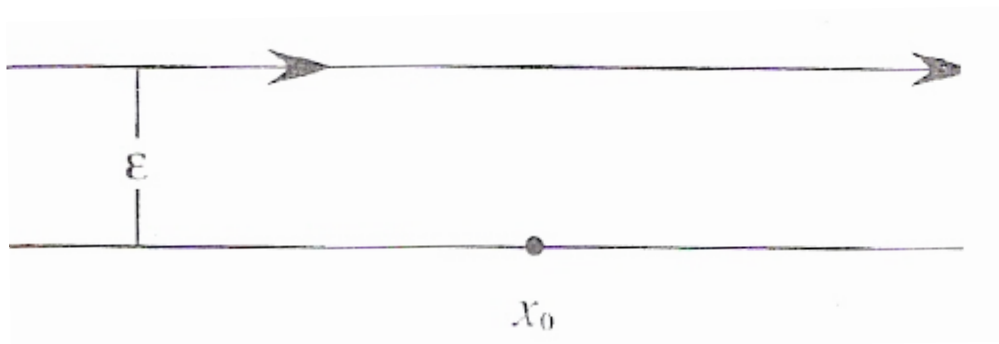
Viktig integral vid fysiktillämpningar:

“Principalvärdet” för en reell funktion med en enkel pol

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-x_0}\,dx \;=\; \pm i\pi f(x_0)+2\pi i\sum_{j=1}^{m}\ \mathrm{Res}[\frac{f(z_j)}{z_j-x_0}]$$

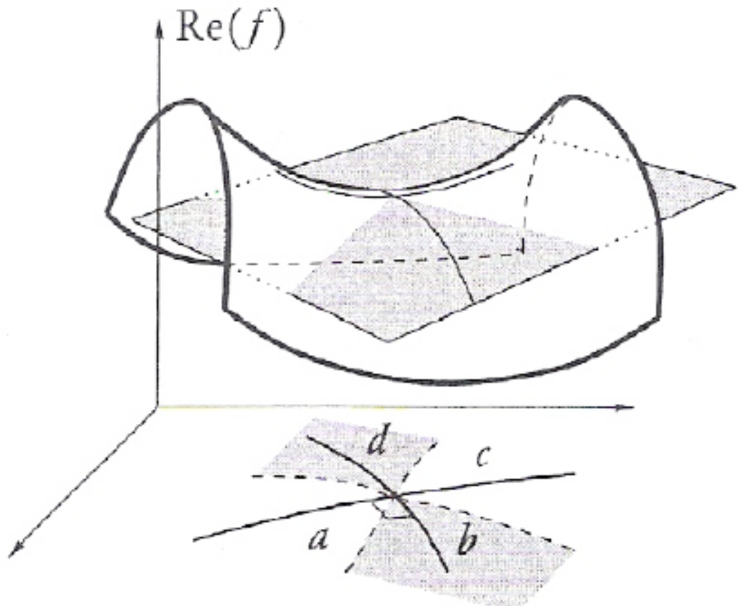
där z_j är polerna till $\frac{f(z)}{z-x_0}$ i övre $(+)$ eller undre $(-)$ komplexa halvplanet.

“Fysikjargong”: $$\frac{1}{x-x_0\pm i\epsilon}=P\frac{1}{x-x_0}\,dx\mp \mathrm{i}\pi\delta(x-x_0)$$



Sadelpunktsmetoden *redux*

$$\int_\gamma e^{-f_\alpha(z)}\,dz \qquad f_\alpha \text{ komplexvärd funktion, } \gamma \text{ kurva i } \mathbb{C}$$



Stationära fas-metoden

$$\int_{\mathbb{R}} e^{if_\alpha x}\,dx \qquad f_\alpha \text{ reellvärd funktion}$$