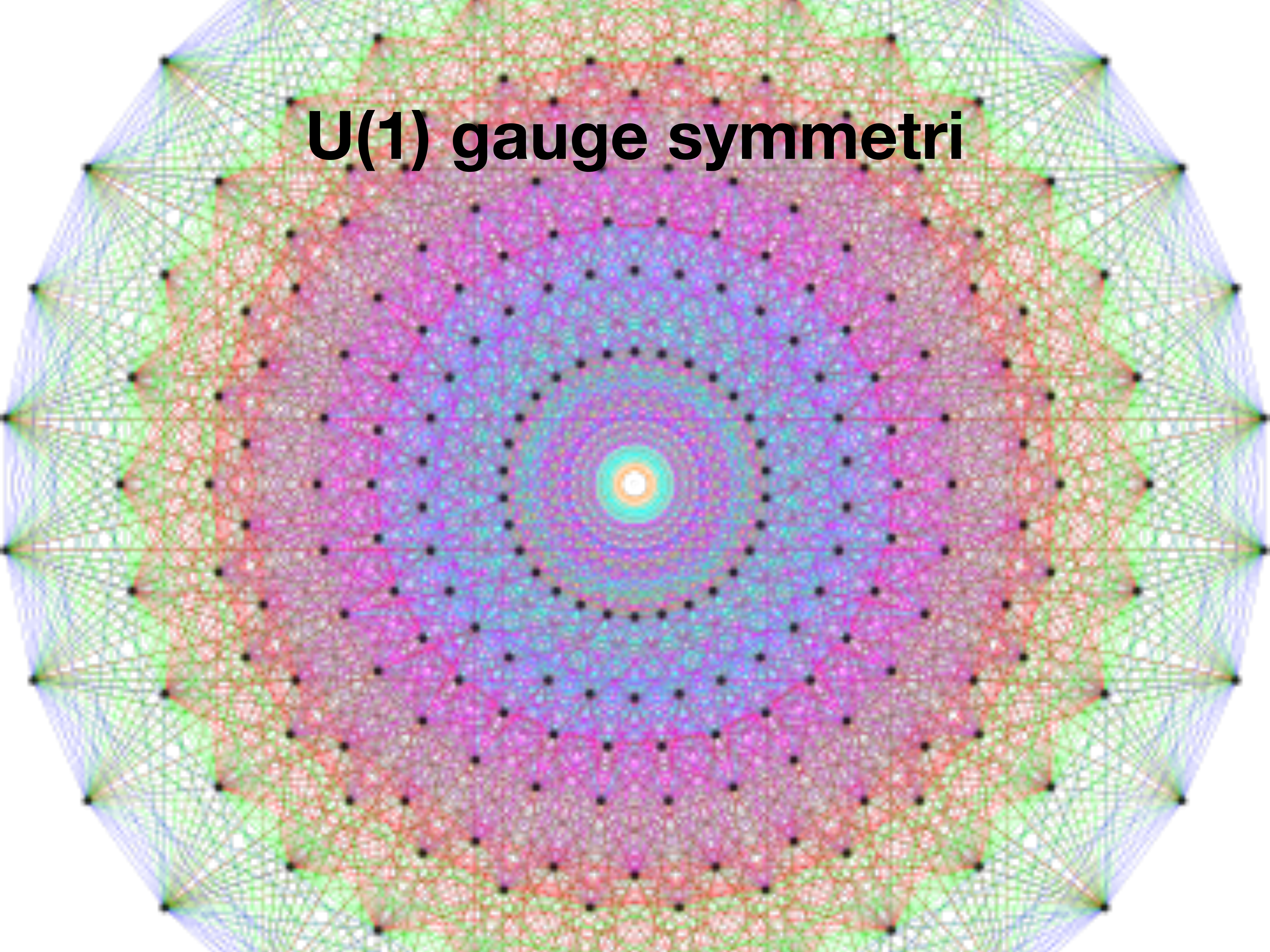

U(1) gauge symmetri

Kontinuerliga grupper i fysiken

några viktiga exempel *(rum-tid symmetrier)*

$x = (ct, \vec{r})$ 4-vektor

Lorentzgruppen $\mathcal{L}$: $\{x \to x' = \Lambda x \mid (dx')^2 = (dx)^2\}$

Λ: 4x4 reell matris

$$(ds)^2 = (dx)^2 \equiv c^2 dt^2 - (d\vec{r})^2$$

mängden av alla koordinattransformationer som lämnar Minkowski-metriken invariant (inkluderar rotationer, Lorentztransformationer, rumsinversion, tidsreversering,...)

4-vektorer

Poincarégruppen $\mathcal{P} = \mathcal{L} \times \mathcal{T}_4$: $\{x \to x' = \Lambda x + a\}$

Konforma gruppen C: $\{x \to x'(x) \mid (dx')^2 = e^{\Omega(x)} (dx)^2\}$

Kontinuerliga grupper i fysiken

några viktiga exempel *(interna symmetrier)*

U(1) gaugegrupp: $\left\{ e^{i\alpha(\vec{r},t)} \right\}$ GRUPP AV U(1) "GAUGETRANSFORMATIONER"

SCHRÖDINGEREKVATIONEN ÄR <u>INTE</u> INVARIANT UNDER $\psi(\vec{r},t) \to \psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\psi(\vec{r},t)$

TY $\partial_\mu \psi' = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\left(\partial_\mu \psi + i(\partial_\mu \alpha(\vec{r},t))\psi\right)$ DÄR $(\partial_\mu \psi)_{\mu=0,1,2,3} \equiv \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}\right) = (\partial_t \psi, \nabla \psi)$

SCHRÖDINGEREKVATIONEN <u>ÄR</u> INVARIANT UNDER U(1) GAUGETRANSFORMATIONER OM VI GÖR SUBSTITUTIONEN $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu^{(A)}$ DÄR

$$D_\mu^{(A)} \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar} A_\mu$$

MED $(A_\mu) = (\phi, -\vec{A})$ ETT "GAUGEFÄLT" MED EGENSKAPEN

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu - \frac{\hbar}{e}\partial_\mu \alpha$$

UNDER GAUGETRANSFORMATIONEN

"KOVARIANT DERIVATA"

$$\begin{cases} D_t^{(A)} = \partial_t + \frac{ie}{\hbar}\phi \\ D_{\vec{r}}^{(A)} = \nabla - \frac{ie}{\hbar}\vec{A} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ U(1) GAUGEINVARIANS IMPLICERAR EXISTENSEN AV ELEKTROMAGNETISKA FÄLT!

Kontinuerliga grupper i fysiken

några viktiga exempel *(interna symmetrier)*

U(1) gaugegrupp: $\{ e^{i\alpha(\vec{r},t)} \}$ GRUPP AV U(1) "GAUGETRANSFORMATIONER"

SCHRÖDINGEREKVATIONEN ÄR INTE INVARIANT UNDER $\Psi(\vec{r},t) \to \Psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\Psi(\vec{r},t)$

TY $\partial_\mu \Psi' = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\left(\partial_\mu \Psi + i(\partial_\mu \alpha(\vec{r},t))\Psi\right)$ DÄR $(\partial_\mu \Psi)_{\mu=0,1,2,3} \equiv \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu}\right) = (\partial_t \Psi, \nabla \Psi)$

SCHRÖDINGEREKVATIONEN ÄR INVARIANT UNDER U(1) GAUGETRANSFORMATIONER

OM VI GÖR SUBSTITUTIONEN $\partial_\mu \longrightarrow D_\mu^{(A)}$ DÄR

$$D_\mu^{(A)} \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar} A_\mu \quad \text{MED} \quad (A_\mu) = (\Phi, -\vec{A})$$

ETT "GAUGEFÄLT" MED EGENSKAPEN

$$A_\mu \to A_\mu' = A_\mu - \frac{\hbar}{e}\partial_\mu \alpha$$

UNDER GAUGETRANSFORMATIONEN

"KOVARIANT DERIVATA"

$$\begin{cases} D_t^{(A)} = \partial_t + \frac{ie}{\hbar}\Phi \\ D_{\vec{r}}^{(A)} = \nabla - \frac{ie}{\hbar}\vec{A} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ U(1) GAUGEINVARIANS IMPLICERAR EXISTENSEN AV ELEKTROMAGNETISKA FÄLT !

U(1) GAUGE INVARIANS
IMPLICERAR EXISTENSEN
AV ELEKTROMAGNETISKA FÄLT!

U(1) GAUGE TRANSFORMATION

$\in \mathbb{R} \Rightarrow$ definierande rep av $U(1)$

$$\psi(\vec{r},t) \longrightarrow \psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\,\psi(\vec{r},t) \qquad (*)$$

U(1) GAUGE TRANSFORMATION

$\in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ definierande rep av U(1)

$$\Psi(\vec{r},t) \longrightarrow \Psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\,\Psi(\vec{r},t) \qquad (*)$$

Schrödingerekvationen för en fri partikel

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \cancel{V(\vec{r})}\right)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

är ej invariant under $(*)$.

Schrödinger ekvationen för en fri partikel

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \cancel{V(\vec{r})}\right)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

är ej invariant under (*).

Kom: Introducera relativistisk notation $(\mu = 0,1,2,3)$

$$\begin{cases} x = (x^\mu) = (t,\vec{r}) \\ (\partial_\mu \Psi) = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \nabla_{\vec{r}}\Psi\right) \\ \Psi(x) = \Psi(t,r) = \Psi(\vec{r},t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \Psi' = \partial_\mu\left(e^{i\alpha}\Psi\right) = e^{i\alpha}\partial_\mu\Psi + ie^{i\alpha}(\partial_\mu\alpha)\Psi$$

$\uparrow$

PROBLEM!

Schrödingerekvationen för en fri partikel

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \cancel{V(\vec{r})} \right)\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t)$$

är ej invariant under (*) .

Kom : Introducera relativistisk notation $(\mu = 0,1,2,3)$

$$\begin{cases} x = (x^\mu) = (t,\vec{r}) \\ (\partial_\mu \Psi) = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}, \nabla_{\vec{r}}\Psi \right) \\ \Psi(x) = \Psi(t,\vec{r}) = \Psi(\vec{r},t) \end{cases}$$

Kan vi modifiera Schrödingerekvationen så att vi blir av med den här fula termen som bryter gaugeinvariansen?

$$\Rightarrow \partial_\mu \Psi' = \partial_\mu \left(e^{i\alpha}\Psi \right) = e^{i\alpha}\partial_\mu \Psi + ie^{i\alpha}(\partial_\mu \alpha)\Psi$$

PROBLEM !

Vi gör ett försök!

Inför en KOVARIANT DERIVATA $D_\mu^{(A)}$

$$\partial_\mu \Rightarrow D_\mu^{(A)} \equiv \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GAUGEFÄLT}}}{A_\mu}$$

$$(A_\mu) = (\phi, -\vec{A})$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar}\phi \\ \\ \nabla_{\vec{r}} \rightarrow \nabla_{\vec{r}} - \frac{ie}{\hbar}\vec{A} \end{array} \right. \qquad (**)$$

Välj gaugefältet A_μ med egenskapen

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu' = A_\mu - \frac{\hbar}{e}\partial_\mu \alpha \quad \begin{array}{l} \Rightarrow \phi \rightarrow \phi - \frac{\hbar}{e}\frac{\partial\alpha}{\partial t} \\ \Rightarrow \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{\hbar}{e}\nabla_{\vec{r}}\alpha \end{array}$$

under en U(1) gaugetransformation (där $\alpha = \alpha(x) = \alpha(\vec{r}, t)$)

Då transformerar $D_\mu^{(A)}$ på samma sätt som Ψ under gaugetransformationen, dvs.

$$D_\mu^{(A)}\Psi \longrightarrow D_\mu^{(A')}\Psi' = e^{i\alpha}(D_\mu^{(A)}\Psi)$$

$$D_\mu^{(A)}\psi \longrightarrow D_\mu^{(A')}\psi' = e^{i\alpha}\left(D_\mu^{(A)}\psi\right)$$

Bevis

$$D_\mu^{(A')}\psi' = \left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar}A_\mu'\right)\underbrace{e^{i\alpha}\psi}_{\psi'}$$

$$= \left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar}\underbrace{\left(A_\mu - \frac{\hbar}{e}\partial_\mu\alpha\right)}_{A_\mu'}\right)e^{i\alpha}\psi$$

$$= \cancel{i\partial_\mu\alpha\, e^{i\alpha}\psi} + e^{i\alpha}\partial_\mu\psi + \frac{ie}{\hbar}A_\mu e^{i\alpha}\psi - \cancel{i\partial_\mu\alpha\, e^{i\alpha}\psi}$$

$$= e^{i\alpha}\left(\partial_\mu + \frac{ie}{\hbar}A_\mu\right)\psi = e^{i\alpha}\left(D_\mu^{(A)}\psi\right)$$

Ersätt de vanliga derivatorna i Schrödingerekvationen med motsvarande kovarianta derivator, se (**)!

$$\Downarrow$$

"MINIMAL KOPPLING"

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla_{\vec{r}} - \frac{ie}{\hbar}\vec{A}\right)^2 \Psi = i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie}{\hbar}\Phi\right)\Psi$$

Detta är Schrödingerekvationen för en partikel som rör sig i ett elektromagnetiskt fält där

$$\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\Phi + \dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases} \qquad \begin{cases} \Phi & \text{skalärpotential} \\ \vec{A} & \text{vektorpotential} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

U(1) gaugeinvarians implicerar existensen av elektromagnetiska fält!

Vilken är den bevarade storhet (”rörelsekonstant”) som enligt Noether följer från U(1) gauge symmetri?

U(1) GAUGE TRANSFORMATION

$\in \mathbb{R} \Rightarrow$ definierande rep av U(1)

$$\Psi(\vec{r},t) \longrightarrow \Psi'(\vec{r},t) = e^{i\alpha(\vec{r},t)}\,\Psi(\vec{r},t) \qquad (*)$$

Fasen $\alpha(\vec{r},t)$ är en kontinuerlig parameter

$$\Downarrow$$

U(1) gauge invarians är en KONTINUERLIG SYMMETRI

$$\Downarrow \text{ NOETHER}$$

RÖRELSEKONSTANT ?

Emmy Noether, 1882-1935

(klassisk elektrodynamik)

Låt oss undersöka frågan i KLASSISK FYSIK och utnyttja att MAXWELLS EKVATIONER HAR U(1) GAUGE INVARIANS, dvs.

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \varepsilon_0 & (1) \\
\nabla \cdot \vec{B} = 0 & (2) \\
\nabla \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3) \\
\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & (4)
\end{cases}
$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (*)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \qquad (**)$$

är invarianta under U(1) gaugetransformationen

$$\Phi \to \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad , \quad \vec{A} \to \vec{A} + \nabla \chi \qquad (5)$$

där $\chi(\vec{r}, t) \in \mathbb{R}$ (Kvantmekanik: $\chi(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{e} \alpha(\vec{r}, t)$)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (4)$$

Använd (*) och (**) i Maxwell (4), och utnyttja att

$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ samt $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (6)$$

Välj $\underbrace{\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0}_{\text{"Lorenz gauge"}}$ (7) "gauge fixing"

VIKTIGT!

Lorenz gauge är Lorentz (dvs. relativistiskt) invariant

Ludwig Lorenz (dansk matematisk fysiker) $\neq$ Hendrik Lorentz (holländsk fysiker)

VÅGEKVATION FÖR VEKTORPOTENTIALEN

$$(6) \,\&\, (7) \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (8)$$

$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ (1)

Låt oss nu betrakta Maxwell (1) och göra substitutionen (*)

$$\Rightarrow \quad -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) = \rho/\varepsilon_0 \qquad (9)$$

$$(7)\ \&\ (9) \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \rho/\varepsilon_0 \qquad (10)$$

VÅGEKVATION FÖR SKALÄR POTENTIALEN ✓

$\vec{A}$ och ϕ är lösningar till (8) respektive (10), relaterade till $\vec{j}$ respektive ρ med samma operator

$$\underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2}_{\equiv\ \square} \quad \text{d'Alemberts operator}$$

Tag divergensen av (8):

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\nabla\cdot\vec{A} = \mu_0 \nabla\cdot\vec{j} \qquad (11)$$

Tag tidsderivatan av (10):

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (12)$$

$\Downarrow$ (11) & (12)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\left(\varepsilon_0\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\frac{1}{\mu_0}\left(\underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{\frac{1}{c^2}}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A}\right)$$

$$= \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{A}\right)}_{=0 \text{ Lorenz gauge}} \qquad (13)$$

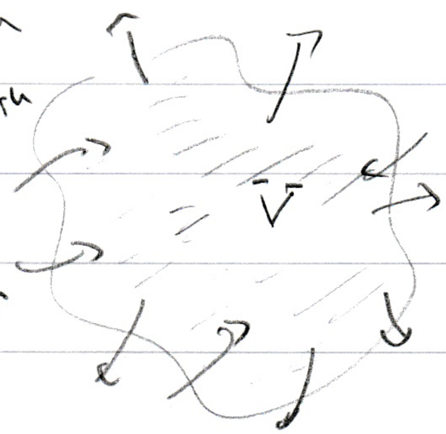
$$= 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$$

KONTINUITETS EKVATIONEN

Ändring av elektrisk laddning i V = flöde av elektrisk laddning in och ut genom dess begränsningsyta



Stokes

$$\int_V \nabla \cdot \vec{j}\, dV = \int_{S=\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Kontinuitets ekvationen

$$= -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV$$

$\Rightarrow$ ELEKTRISK LADDNING BEVARAD