Cauchys patologiska funktion
Matematisk fysik, FTF131

Christin Edblom
edblomc@chalmers.se

24 november 2015

Detta är en (något utvidgad) gammal tentamensuppgift, som handlar om Cauchys patologiska funktion:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} . \tag{1}$$

Så vad är en "patologisk" funktion? Helt enkelt en funktion som på något vis inte beter sig väl: något konstigt eller kontraintuitivt händer. Lättast är att förstå begreppet genom att titta på några exempel.

Ett sådant är Weierstrass' funktion

$$f_W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x), \tag{2}$$

där $a \in (0, 1)$, $b \in \mathbb{Z}^+$, och $ab > 1 + 3\pi/2$. Denna funktion är överallt kontinuerlig, men ingenstans deriverbar! Funktioner med dessa egenskaper är vanliga i problem med en stokastisk komponent, till exempel diffusion av partiklar, klassiskt brus i fysikaliska system, och finansiell matematik.

Ett annat exempel är Dirichletfunktionen

$$I_Q(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} , \tag{3}$$

som inte är kontinuerlig någonstans!

Fraktala kurvor som till exempel Kochkurvan och Peanokurvan kan ses som patologiska då de ju formellt är endimensionella objekt, men ändå har en "effektiv" dimension (Hausdorffdimension) som är ett reellt tal mellan 1 och 2.

Ett sista exempel är Cauchy- eller Lorentz-distributionen, en sannolikhetsfördelning som ofta dyker upp i fysiken. En Lorentzian är kontinuerlig och slät, och påminner mycket om en normalfördelning, men dess medelvärde och varians är odefinierade!

Vad är det som är patologiskt med (1)? Som vi här ska visa är f kontinuerlig och oändligt deriverbar, men något konstigt händer när vi tittar på dess Maclaurinserie. För att bättre förstå övergår vi till att titta på (1) som en funktion av en komplex variabel, och utnyttjar våra nyvunna kunskaper i komplex analys.

1 Kontinuitet

En funktion $g(x)$ är kontinuerlig i $x = a$ om

$$\lim_{x\to a^+} g(x) = \lim_{x\to a^-} g(x) = g(a). \tag{4}$$

I fallet (1) är f en sammansättning av kontinuerliga funktioner för alla $x \neq 0$, och därför själv kontinuerlig för dessa x. Den enda punkt vi måste studera närmare är alltså $x = 0$.

Vi börjar med vänstergränsvärdet. På grund av att f är kontinuerlig på $(0, \infty)$ kan vi byta plats på sammansättningen och gränsvärdet. Det vill säga,

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = \exp\left\{-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\right\}. \tag{5}$$

För varje positivt B sådant att $1/x^2 > B$ kan vi välja $\delta = 1/\sqrt{B}$, vilket medför att $|x - 0| < \delta$. Alltså är $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = \infty$, och

$$\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0. \tag{6}$$

Då f är en jämn funktion beräknas högergränsvärdet på identiskt sätt som vänstergränsvärdet, och

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0. \tag{7}$$

Det följer att f är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$.

2 Deriverbarhet

En funktion $g(x)$ är deriverbar i $x = a$ om

$$g'(a) = \lim_{h\to a}\frac{g(a+h) - g(a-h)}{2h} \tag{8}$$

existerar (anledningen till att vi använder en central differenskvot kommer snart bli tydlig).

Som tidigare kan vi notera att f är en sammansättning av släta (oändligt deriverbara) funktioner på $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, så (1) är deriverbar på samma intervall. Vi behöver alltså bara specifikt studera punkten $x = 0$, vilket ger oss

$$f^{(1)}(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(-h)}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{1/h^2} - e^{1/(-h)^2}}{2h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{2h} = 0. \tag{9}$$

Cauchy's patologiska funktion är alltså deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$, och $f'(0) = 0$.

Vi beräknar ytterligare några derivator av f i $x = 0$, och med hjälp av att

$f(0) = 0$ och att $f(-x) = f(x)$ ser vi att

$$f^{(2)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2h) - 2f(0) + f(-2h)}{4h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-1/4h^2}}{2h^2} = 0, \tag{10}$$

$$f^{(3)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3h) - 3f(h) + 3f(-h) - f(-3h)}{8h^3} = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4h) - 4f(2h) + 6f(0) - 4f(-2h) + f(-4h)}{16h^4} \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{e^{-1/16h^2}}{8h^4} - \frac{e^{-1/4h^2}}{2h^4} \right] = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Gränsvärdet i ekvation (10) kan beräknas genom substitutionen $1/4h^2 = t$:

$$2 \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = 2 \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t}, \tag{13}$$

där vi använt l'Hôpitals regel en gång i det sista steget. Vi låter nu R vara ett positivt tal, och väljer $\epsilon = e^{-R}$. $t > R$ implicerar då att $|1/e^t| < \epsilon$, och vi har bevisat att gränsvärdet (13) är lika med noll. På samma sätt kan gränsvärdet i (12) beräknas.

I allmänhet (ett liknande uttryck för derivatan i en godtycklig punkt a får genom ett enkelt variabelbyte) gäller för en funktion g att

$$g^{(n)}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k g\big((2k-n)h\big), \tag{14}$$

och med hjälp av symmetrin hos f och liknande beräkningar som ovan är det är lätt att övertyga sig om att $f^{(n)}(0) = 0$ för alla n.

Nu när vi känner till alla derivator för (1), finner vi att dess Maclaurinutveckling är

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0. \tag{15}$$

Men $\exp(-1/x^2)$ är strikt positiv, så utvecklingen (15) stämmer alltså enbart för $x = 0$! Här ser vi det patologiska i Cauchy's patologiska funktion; f är kontinuerlig och oändligt deriverbar, något som normalt kännetecknar de "snällaste" funktioner vi känner till, och ändå konvergerar Maclaurinserien bara i en enda punkt. Vad står på?

Sidospår

Ekvation (14) bevisas till exempel med hjälp av induktion, där induktionssteget består i att visa att

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(0) &= \lim_{\ell\to 0} \frac{g^{(n)}(\ell) - g^{(n)}(-\ell)}{2\ell} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \lim_{\ell\to 0} \frac{g\big((2k-n)h + \ell\big) - g\big((2k-n)h - \ell\big)}{2\ell} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{(2h)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k g\big((2k-(n+1))h\big). \end{aligned} \tag{16}$$

Detta lämnas som en övning; den stora utmaningen ligger i att bevisa att ℓ-gränsvärdet får flyttas innanför h-gränsvärdet och summationen över k. I allmänhet är detta ett svårt problem, där ett tillräckligt men mycket begränsande villkor är att alla gränsvärden konvergerar likformigt (mer om detta senare i kursen!). För oss förenklar det att summan är ändlig, och att vi känner till vissa "snälla" egenskaper hos f.

3 Komplex tolkning

Vi övergår till att titta på en komplex version av Cauchys patologiska funktion:

$$f(z) = e^{-1/z^2}, z \in \mathbb{C}. \tag{17}$$

Denna funktion är analytisk på $|z| \in (0, \infty)$, och med tanke på hur $f(x)$ såg ut ligger det nära till hands att tro att singulariteten i $z = 0$ är borttagbar. Är det så? Vi undersöker Laurentserien till (17):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}\zeta \frac{e^{-1/\zeta^2}}{\zeta^{n+1}} \tag{18}$$

där C är en positivt orienterad sluten kurva som passerar runt singulariten i origo en gång.

För att förenkla denna integral gör vi variabelbytet

$$u = \frac{1}{\zeta}, \qquad \mathrm{d}\zeta = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u. \tag{19}$$

Notera att det som var en positivt orienterad kontur i det komplexa z-planet blir en negativt orienterad kontur i det komplexa u-planet, eftersom att variabelbytet involverar att "byta plats" på origo och ∞. För att slippa komma ihåg att C nu är negativt orienterad byter vi riktning på den, vilket ger ett minustecken som tar ut tecknet framför du ovan. Till sist får vi alltså

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \mathrm{d}u \; e^{-u^2} u^{n-1}, \tag{20}$$

och vi ser direkt att $c_n = 0$ för positiva n, på grund av att integranden då är analytisk innanför C. För icke-positiva n har integranden en pol av ordning $|n-1|$, och

$$c_n = \operatorname{Res}\left[e^{-u^2} u^{n-1}, 0\right]. \tag{21}$$

I allmänhet beräknas residyn av en funktion $g(z)$ som har en pol av ordning m i $z = 0$ enligt

$$\operatorname{Res}[g(z), 0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to 0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[z^m g(z)\right]. \tag{22}$$

Med hjälp av detta uttryck finner vi

$$c_0 = \lim_{u\to 0} u \frac{e^{-u^2}}{u} = 1 \tag{23}$$

och

$$c_{-1} = \lim_{u\to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[u^2 \frac{e^{-u^2}}{u^2}\right] = -\lim_{u\to 0} 2ue^{-u^2} = 0. \tag{24}$$

Här inser vi att residyn för alla c_n där n är ett udda negativt heltal kommer att vara proportionella mot en udda ordningens derivata av e^{-u^2}. Dessa är proportionella mot u, och residyn blir alltså lika med noll.

Genom att fortsätta på samma sätt finner vi

$$c_{-2} = -1, \quad c_{-4} = \frac{1}{2}, \quad c_{-6} = -\frac{1}{6}, \quad c_{-8} = \frac{1}{24} \tag{25}$$

och i allmänhet gissar vi på att

$$c_{-2k} = (-1)^k \frac{1}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{26}$$

För att riktigt kunna bevisa (26) vill vi helst skriva ner ett slutet uttryck för den n:te derivatan av e^{-u^2} för att sedan genomföra ett induktionsbevis. Ett sådant slutet uttryck är dock bortom denna kurs, så för tillfället får vi nöja oss med den begåvade gissninen i (26).

Vi samlar nu ihop Laurentserien för $f(z)$. Notera att variabelbytet i integralen (18) inte påverkar variabeln i serieutvecklingen; c_{-2} är koefficienten till z^{-2}, inte till u^{-2}. Vi har alltså funnit

$$\begin{aligned} e^{-1/z^2} &= 1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2z^4} - \frac{1}{6z^6} + \frac{1}{24z^8} - \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{1}{z^2}\right)^k. \end{aligned} \tag{27}$$

Det finns två saker som är slående med detta resultat. För det första ser vi att Laurentserien har oändligt många termer med negativa n; singulariteten i $z = 0$ är *essentiell*, vilket förklarar varför (1) är patologisk (ett av de häftigaste resultaten i komplex analys är Picards stora sats, som säger att i varje omgivning till en essentiell singularitet kommer funktionen i fråga att anta *alla* komplexa värden; hela det komplexa talpanet avbildas på en essentiell singularitet). För det andra kan vi notera att Laurentserien (27) är precis Maclaurinserien till e^x, med $x = -1/z^2$. Detta är ett betydligt lättare men inte alls lika roligt sätt att härleda (27).