# Föreläsning 26/9
# Elektromagnetiska fält och Maxwells ekavtioner

Mats Persson

## 1 Maxwells ekvationer

Maxwell satte 1864 upp fyra stycken ekvationer som gav en fullständig beskrivning av ett elektromagnetiskt fält. Dock, som vi skall se, inskränkte sig hans eget bidrag till en term i en av ekvationerna.

En av ekvationerna har vi redan stött på. Det är Gauss lag för ett elektriskt fält

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{1}$$

Den här ekvationen säger att elektriska fält kan ha elektriska laddningar som källor.

Å andra sidan finns det inte några magnetiska laddningar. Trots många års experimentella eftersökningar har man aldrig hittat några så kallade magnetiska monopoler. Därför kan vi dra slutsatsen att det för ett magnetfält måste gälla att

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{2}$$

Av detta kan vi sluta oss till att magnetfält inte alstras av magnetiska laddningar. Istället så vet vi att magnetfält kan alstras av elektriska strömmar. Vi vet att det magnetiska fältet kring en rak ledare parallell med $z$-axeln genom vilken det går en ström $I$ kan skrivas som

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\hat{\varphi} \tag{3}$$

uttryckt i cylindriska koordinater. Vi beräknar nu

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} \tag{4}$$

längs en kurva som omsluter ledaren. Vi konstaterar först att $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ för $\rho \neq 0$. Därmed kan vi komprimera ner $C$ till en cirkel med radien $\epsilon$ kring den elektriska ledaren

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{C_\epsilon} \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{C_\epsilon} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\hat{\varphi} \cdot \mathbf{dr} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\epsilon}\oint_{C_\epsilon} \mathrm{d}r = \mu_0 I. \tag{5}$$

Detta samband, Amperes lag, gäller helt allmänt oberoende av den elektriska ledarens form och hur strömmen tar sig fram genom ledaren innanför kurvan $C$. Strömmen $I$ som går genom kurvan $C$ kan vi skriva som

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS}, \tag{6}$$

där $\mathbf{J}$ är strömtätheten. Vi kan också skriva om vänsterledet med Stokes sats

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = \int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{dS} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS}. \tag{7}$$

Ytan $S$ med randen $C$ är nu helt godtycklig, så vi kan sätta integranderna lika med varandra

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{8}$$

Detta är den tredje av Maxwells ekvationer men den kommer att visa sig vara ofullständig i det tidsberoende fallet.

Vi har nu funnit att elektriska laddningar kan skapa elektriska fält och att elektriska strömmar kan skapa magnetfält. Vi vet dock att elektriska fält också kan skapas genom induktion. En förändring av det magnetiska flödet, $\Phi$, genom en elektrisk ledare inducerar ett elektriskt fält $\mathbf{E}$ i ledaren som i sin tur ger upphov till en ström och ett magnetisk fält som vill motverka förändringen i det magnetiska flödet. Enligt Faradays induktionslag så gäller om ledaren följer en sluten kurva $C$ att

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}. \tag{9}$$

Å andra sidan kan vi skriva det magnetiska flödet genom ledaren som

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}. \tag{10}$$

Vi kan nu skriva Faradays induktionslag som

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot \mathbf{dr} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}. \tag{11}$$

Vi kan nu skriva om vänsterledet med Stokes sats, och i högerledet kan vi kasta om ordningen på integrationen och deriveringen

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{dS} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{dS}. \tag{12}$$

Ytan $S$ och dess rand $C$ är egentligen helt godtycklig här, så likheten måste gälla mellan integranderna också. Alltså har vi

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{13}$$

Vi har nu fått fram fyra ekvationer som beskriver de elektriska och magnetiska fälten, eller snarare ger uttryck för deras divergenser och rotationer.

Ekvationerna är dock inte kompletta i den här formen. Den elektriska laddningen är en bevarad storhet i naturen. Låt oss betrakta en godtycklig volym $V$ med en laddningstäthet $\rho$. Den totala laddningen i $V$ är då

$$\int_V \rho \mathrm{d}V. \tag{14}$$

Denna laddning kan förändras genom att en elektrisk ström, $\mathbf{J}$, går genom ytan $S$ till $V$. Utflödet av laddning från volymen $V$ per tidsenhet kan då skrivas som

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS}. \tag{15}$$

Villkoret att laddningen bevaras ger oss då

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathrm{d}V = -\oint_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{dS}. \tag{16}$$

I vänsterledet kan vi byta på ordningen mellan integralen och tidsderivatan, och högerledet kan vi skriva om med hjälp av Gauss sats

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} \mathrm{d}V. \tag{17}$$

Nu gäller det att vi har valt volymen $V$ helt godtyckligt, så samma likhet måste gälla för integranderna själva, så vi får kontinuitetsekvationen

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}. \tag{18}$$

Å andra sidan så säger Amperes lag att $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, och vi kan nu beräkna

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0, \tag{19}$$

enligt räknereglerna för vektoroperatorerna. Det följer därför att

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{20}$$

vilket är orimligt, för det betyder att det inte går att flytta en elektrisk laddning. Detta insåg Maxwell och kom fram till att problemet gick att lösa genom att lägga till en term

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{21}$$

till högerledet av Amperes lag. Denna term brukar kallas för förskjutningsströmmen. Vi får nu alltså att Maxwells ekvationer blir

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{22}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{23}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{24}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{25}$$

## 2 Källfria och virvelfria fält

Vi vet att ett fält $\mathbf{E}$ sådant att $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ har en potential $\Phi$ sådan att $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Vi säger att fältet $\mathbf{E}$ är virvelfritt (rotationsfritt) eller konservativt. Om ett konservativt fält $\mathbf{E}$ uppfyller ekvationen $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, så säger vi att fältet genereras av en källa $\rho$. Vi kan då bestämma fältets potential genom att lösa Poisson-ekvationen $\nabla^2\Phi = -\rho$. Lägg märke till att potentialen ej är fullständigt bestämd. Det går alltid att addera en konstant till potentialen utan att $\mathbf{E}$ förändras. Ett exempel på ett virvelfritt fält är ett elektrostatiskt fält.

Å andra sidan kallar vi ett fält sådant att $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ för ett källfritt fält. Ett källfritt fält kan vi skriva som $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ för något $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$ kallas för vektorpotentialen. Precis som den vanliga potentialen inte är fullständigt bestämd, utan man kan addera till en konstant till potentialen, kan man till vektorpotentialen addera ett vektorfält $\nabla f$, där $f$ är ett godtyckligt skalärt fält, eftersom $\nabla\times(\nabla f) = 0$. En explicit konstruktion av vektor potentialen från det källfria fältet ges av,

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \left[\int_0^z B_y(x, y, z')dz' - \int_0^y B_z(x, y', z)dy'\right]\hat{\mathbf{x}} - \int_0^z B_x(x, y, z')dz'\hat{\mathbf{y}}\ . \tag{26}$$

**Exempel:** Betrakta en elektrisk ledare parallell med $z$-axeln. Genom ledaren flyter en ström $I$. Då omges ledaren av ett magnetfält

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\hat{\varphi}. \tag{27}$$

Vi kan nu bestämma den motsvarande vektorpotentialen ur ekvationerna

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho} \tag{29}$$

och

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho A_\varphi\right) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right] = 0. \tag{30}$$

Dessa ekvationer uppfylles om

$$\mathbf{A} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I \log\frac{\rho}{\rho_0}\hat{\mathbf{z}}, \tag{31}$$

där $\rho_0$ är en godtycklig konstant. Notera att $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ utanför ledaren (notera att detta är ett icke enkelt sammanhängande område) vilket medför att en envärd potential kan inte definieras i detta område eftersom en kurvintegral av fältet runt ledaren är skilt från noll.

Låt oss nu betrakta Amperes lag i det tidsoberoende fallet

$$\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}. \tag{32}$$

Om vi nu ersätter $\mathbf{B}$ med $\nabla \times \mathbf{A}$ så har vi

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \tag{33}$$

För vänsterledet har vi räkneregeln (se ex. vis. Kap. 4.6 i VC)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{34}$$

Den frihet, gauge, som vi har i att bestämma $\mathbf{A}$ gör det alltid möjligt att garantera att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, så vi kan reducera ekvationen till

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}, \tag{35}$$

och vi har på så sätt kommit fram till en Poisson-ekvation för vektorpotentialen.

I det tidsberoende fallet är inte fältet $\mathbf{E}$ virvelfritt enligt induktionsekvationen och saknar då en skalär potential. Men enligt induktions ekvationen är $\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ virvelfritt eftersom

$$\nabla \times (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{t}}) = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \nabla \times \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{36}$$

och kan beskrivas med en skalär potential $\Phi$ vilket ger då direkt att,

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{37}$$

Allmänt kan ett fält $\mathbf{E}$ delas upp i en del som är virvelfri, och en del som är källfri den så kallade Helmholtz uppdelningen.

# 3 Maxwells ekvationer i vakuum och elektromagnetiska vågor

I vakuum finns det inga elektriska laddningar, och inga elektriska strömmar, så vi kan skriva Maxwells ekvationer som

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{38}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{39}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{40}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{41}$$

Vi kan nu till exempel beräkna rotationen av induktionsekvationen Ekv. (40)

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{42}$$

Vi kan nu utnyttja att $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ och Ekv. (41)

$$-\nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \tag{43}$$

Låt oss nu betrakta ekvationen

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \mathbf{E}, \tag{44}$$

i en dimension:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}. \tag{45}$$

Ekvationen har då lösningar på formerna $\mathbf{E}(x - ct)$ och $\mathbf{E}(x + ct)$, vilka beskriver vågor som fortplantar sig i den positiva respektive den negativa riktningen med hastigheten $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$. Vi kallar därför Ekv. (44) för vågekvationen. Man kan också härleda en ekvation för en våg av magnetfält ur Maxwells ekvationer. Vågen består därför av svängande elektriska och magnetiska fält, vilka genererar varandra. Den hastighet med vilken vågen breder ut sig överensstämmer med ljusets hastighet, och man kan därför dra slutsatsen att ljus är en form av elektromagnetiska vågor.