

Inlämningsuppgift 1: Lösning

a) Det enklaste sättet att angripa problemet är att använda energikonserveringslagen vid kranens utlopp och vid behållarens topp i ett godtyckligt ögonblick innan påfyllningen av behållaren har slutat. Vid detta ögonblick har laddningen q_1 ackumulerats på behållarens väggar och varje ny droppe medför laddningen q . En droppe med massan m och laddningen q har vid kranens utlopp totala energin:

$$E_{\text{total}} = mgh + \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0(h+R)}$$

Den första termen är den potentiella energin för den stillastående droppen vid kranens utlopp medan den andra termen är den elektriska potentiella energin hos en laddad vattendroppe (laddning q) i potentialen från det sfäriska skalet med laddningen q_1 . Höjden h mäts från behållarens botten till kranens utlopp.

Samma vattendroppe har när den når behållarens öppning totala energin:

$$E_{\text{total}} = mg2R + \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{mv^2}{2}$$

där den första termen är vattendroppens potentiella energi vid behållarens öppning (behållaren är sfärisk och eftersom öppningen är liten befinner sig öppningen på höjden $2R$), den andra termen är den elektriska potentiella energin och den sista termen är den kinetiska energin hos droppen vid behållarens öppning.

Energikonservering kräver:

$$mg2R + \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{mv^2}{2} = mgh + \frac{qq_1}{4\pi\epsilon_0(h+R)}.$$

Vi konstaterar att när q_1 ökar minskar droppens hastighet vid behållarens öppning.

Uppladdningen av behållaren slutar när droppens hastighet är noll. I det kritiska läget är laddningen på behållaren:

$$mg(h+2R) = \frac{qq_{cr}}{4\pi\epsilon_0} \frac{h+2R}{R(h+R)}$$

eller

$$q_{cr} = \frac{mg4\pi\epsilon_0}{q} R(h+R).$$

Eftersom varje droppe är uppladdad till potentialen V_0 och

$$V_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

får vi

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{q} = \frac{1}{V_0 r}$$

och till slut

$$q_{cr} = \frac{mgR(h - R)}{rV_0} = \frac{\frac{4}{3}r^3\rho gR(h - R)}{rV_0} = \frac{\frac{4}{3}r^2\rho gR(h - R)}{V_0}$$

$$q_{cr} = \frac{\frac{4}{3}(0.002)^2 \times 1000 \times 9.81 \times 0.2 \times (1 - 0.2)}{100} = 2.62 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Men här ser man att det går inte att placera så mycket laddning i behållare. Antalet droppar som platsar i behållaren är $(R/r)^3$ dvs 10^6 droppar. Varje dropp bär en laddning q som är:

$$q = \frac{Vr}{4\pi\epsilon_0} = \frac{100 \cdot 0.002}{8.99 \cdot 10^9} = 2.2 \cdot 10^{-11} \text{ C}$$

Detta betyder att det krävs totalt av $2.62 \cdot 10^{-4} / 2.2 \cdot 10^{-11} = 1.19 \cdot 10^7$ droppar för att nå kritiskladdning q_{cr} . Så många platsar ej i behållaren.

b) När behållaren är fylld då är potentialen på ytan:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{10^6 \cdot 2.2 \cdot 10^{-11}}{0.2} = 98.89 \cdot 10^4 \text{ V}$$

Om vi skulle ladda droppar istället så att $V_0 = 1000 \text{ V}$ då får vi $q_{cr} = 2.62 \cdot 10^{-5} \text{ C}$ och $q = 2.2 \cdot 10^{-10} \text{ C}$.

Detta betyder att det räcker med $1.19 \cdot 10^5$ droppar att åstadkomma kritiska laddningen som krävs.

Då är den kritiska potentialen på behållaren V_{cr}

$$V_{cr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = 8.99 \cdot 10^9 \frac{1.19 \cdot 10^5 \cdot 2.2 \cdot 10^{-10}}{0.2} = 989.68 \cdot 10^3 \text{ V}$$