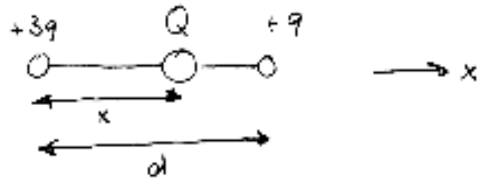
ÖVNING 1 : lösningar till rekommenderade uppgifter

23.10



$$\vec{F}(\text{på } Q) = k_e \frac{3qQ}{x^2}\,\hat{i} + k_e \frac{qQ}{(d-x)^2}(-\hat{i}) \qquad ; \quad k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

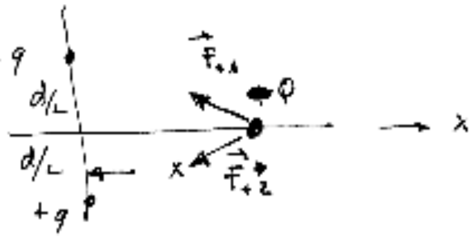
Nettokraften är noll om:

$$\frac{3}{x^2} = \left(\frac{1}{d-x}\right)^2 \quad \text{eller} \quad d - x = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

⇒ jämviktsläge för laddningen Q är vid $x = 0.634d$

⇒ jämvikten är stabil om $Q > 0$.

23.12



$$\vec{F}_{total} = \vec{F}_{+1} + \vec{F}_{+2} = \frac{k_e qQ}{\frac{d^2}{4}+x^2}\left(\frac{-x\hat{i}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+x^2}} + \frac{-\frac{d}{2}\hat{j}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+x^2}}\right) + \frac{k_e qQ}{\frac{d^2}{4}+x^2}\left(\frac{-x\hat{i}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+x^2}} - \frac{\frac{d}{2}\hat{j}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+x^2}}\right)$$

$$\vec{F}_{total} = \left(\frac{2k_e qQ}{\frac{d^2}{4}+x^2}\right)\left(\frac{-x\hat{i}}{\sqrt{\frac{d^2}{4}+x^2}}\right)$$

För små x i.e. $x \ll \frac{d}{2}$

$$\vec{F}_{total} \approx -\frac{2k_e qQ}{d^3/8}\,x\,\hat{i}$$

a) Rörelse equationen:

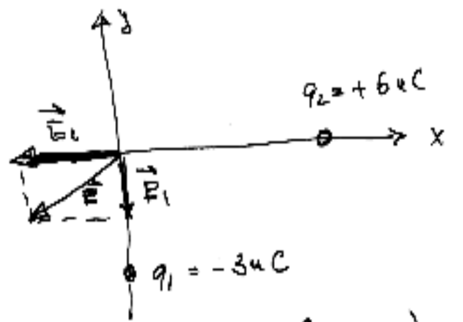
$$m\vec{a} = \vec{F}_{total} = -\frac{2k_e qQ}{d^3/8}\,x\,\hat{i}$$

$$|\vec{a}| = -\frac{2k_e qQx}{m\,d^3/8} = -\omega^2 x \Rightarrow \text{enkel harmonisk oscillator}$$

$$\omega^2 = \frac{16k_e qQ}{m d^3} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m d^3}{k_e qQ}}$$

b) $v_{max} = \omega A = 4a\sqrt{\frac{k_e q Q}{m d^3}}$

23.19



a)

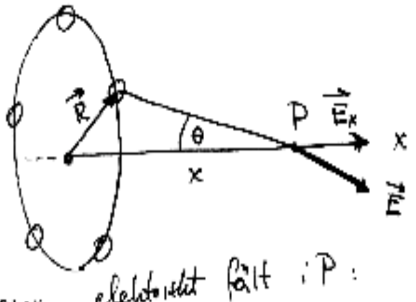
$$\vec{E}_1 = \frac{k_e|q_1|}{r_1^2}(-\hat{j}) = \frac{(8.99\cdot10^{9})(3\cdot10^{-9})}{(0.1)^2}(-\hat{j}) = -\left(2.7\cdot10^{3}\,\frac{N}{C}\right)\hat{j}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{k_e|q_2|}{r_2^2}(-\hat{i}) = \frac{(8.99\cdot10^{9})(6\cdot10^{-9})}{(0.3)^2}(-\hat{i}) = -\left(5.99\cdot10^{2}\,\frac{N}{C}\right)\hat{i}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \underline{-5.99\cdot10^{2}\,\hat{i} - 2.7\cdot10^{3}\,\hat{j}}\ \left(\frac{N}{C}\right)$$

b) $\vec{F} = q\vec{E} = (5\cdot10^{-9}\,C)\cdot(-599\,\hat{i} - 2700\,\hat{j})\,\frac{N}{C} = \underline{(-3\,\hat{i} - 13.5\,\hat{j})}\,N$

23.23



a) En laddning skapar elektriskt fält i P:

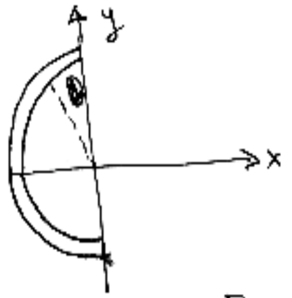
$$\vec{E} = k_e\frac{Q/n}{R^2+x^2}$$ riktad θ från x riktningen.

n är jämn $\Rightarrow$ total fältet i P är

$$\vec{E}_x = \frac{n\,k_e\,Q/n\,\hat{i}\cdot\cos\theta}{R^2+x^2} = \frac{k_e Q x\,\hat{i}}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

b) om $n \to \infty \Rightarrow$ laddningen utsmetad över ringen. E_x påverkas ej därför att avståndet till P är oförändrad.

23.33



Från symmetri $\Rightarrow$ $E_y = \int dE_y = 0$

$$E_x = \int dE \sin\theta = k_e \int \frac{dq \sin\theta}{r^2}$$

där $dq = \lambda ds = \lambda r d\theta$. Då får vi:

$$E_x = \frac{k_e \lambda}{r} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{k_e \lambda}{r} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2k_e\lambda}{r}$$

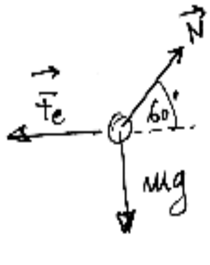
där $\lambda = \frac{q}{L}$ och $r = \frac{L}{\pi}$. Då får vi:

$$E_x = \frac{2k_e q \pi}{L^2} = \frac{2\left(8.99 \cdot 10^9\right)\cdot\left(7.5 \cdot 10^{-6}\right)\cdot \pi}{(0.140)^2} = 2.16 \cdot 10^7 \frac{N}{C}$$

Pga att staven är negativ laddad $\Rightarrow$

$$\vec{E} = -\left(2.16 \cdot 10^7 \hat{i}\right) \quad \frac{N}{C}$$

23.68 Vi kollar alla krafter som agerar på kulan till vänster:



$$\Rightarrow \sum F_y = N \sin 60 - mg = 0$$

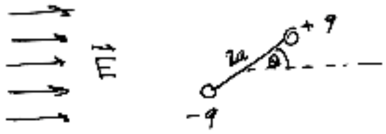
$$\Rightarrow N = \frac{mg}{\sin 60}$$

$$\Rightarrow \sum F_x = -F_e + N \cos 60 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k_e q^2}{R^2} = N \cos 60 = \frac{mg}{tg 60} = \frac{mg}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow q = R\left(\frac{mg}{k_e\sqrt{3}}\right)^{1/2}$$

(23.73')



Kraft moment på två laddningar (+ och −) är:

$$\tau = -2Fa\sin\theta = -2Eqa\sin\theta$$

om $\theta \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$; då får vi

$$\tau = -Ep\theta \qquad \text{med } p = 2qa$$

Rörelse ekvationen: (kraft moment orsakar vinkel acceleration)

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Ep}{I}\right)\cdot\theta = 0$$

eller

$$\underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0}_{\text{harmonisk oscillator ekv.}} \qquad \text{med } \omega^2 = \frac{Ep}{I}$$

$$\theta(t) = A\cos\omega t$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2qaE}{I}}$$