Tentamen 050524 – Lösningar

1.1 a) Det går inte att säga om E-fältet orsakas av en ⊕ ~~eller~~ laddning placerad till vänster eller en ⊖ laddning placerad till höger av observationspunkten.

b) E-fältet orsakas av en positiv laddning placerad till vänster av observationspunkten. E-fältet är riktad ifrån laddningen och minskar med avståndet från källan.

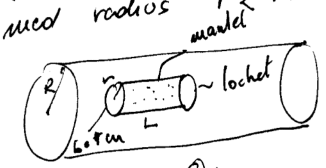
c) $\frac{E(r_1)}{E(r_2)} = \frac{900}{400}$

$$\left.\begin{aligned} E(r_1) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1^2} \\ E(r_2) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{E(r_1)}{E(r_2)} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{900}{400} \Rightarrow \underline{\underline{r_2 = 1.5\, r_1}}$$

Laddningen (⊕) är placerad här

1.2 a) E-fältet pekar radiel ut både innom och utanför cylindern.

b) Pga cylindrisk symmetri vi använder Gauss sats med Gaussisk yta som en cylinder med radius $r < R$ som är L-m lång



Gauss sats: $\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int_{botten} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{lochet} \vec{E}\cdot d\vec{A} + \int_{mantel} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \underset{\vec{E}\perp d\vec{A}}{0} + \underset{\vec{E}\perp d\vec{A}}{0} + \int E\,dA$$

$$= 0 + 0 + E\int dA = E\cdot 2\pi r L$$

$Q_{in} = \rho \pi r^2 L$

Gauss sats: $\underline{E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}}$ (riktat radiel ut)

c) Vi räknar $V_0 - V_R$ genom att räkna potentialenergiskillnad $U_0 - U_R$ som arbetet man gör när en tritium jon med laddning q_T förs från mantel $(r=R)$ till cylinderns centrum $(r=0)$. (2)

$$U_0 - U_R = \int_R^0 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_R^0 q\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_R^0 q \frac{\rho r \hat{r}}{2\varepsilon_0} (-\hat{r} dr)$$

– tecken pga vi rör oss emot E-fältetsriktning

$$U_0 - U_R = q \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \int_0^R r dr = q_T \rho \frac{R^2}{4\varepsilon_0}$$

$$V_0 - V_R = \Delta V = \frac{U_0 - U_R}{q_T} = \frac{\rho R^2}{4\varepsilon_0} = \frac{6\cdot 10^{-5} \cdot (0.1)^2}{4 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} = \underline{16\ 949\ V}$$

d) Tritium jon måste ha kinetisk energi vid $r=R$ som är lika stor som pot. energi skillnad mellan punkterna $r=R$ och $r=0$.

$$\frac{1}{2} m_T v_T^2 = \frac{\rho R^2 q_T}{4\varepsilon_0}$$

$$v_T = \sqrt{\frac{\rho R^2 q_T}{2\varepsilon_0 m_T}} = \sqrt{\frac{6\cdot 10^{-5} (0.1)^2 \cdot 1.6\cdot 10^{-19}}{2\cdot 8.85\cdot 10^{-12} \cdot 5\cdot 10^{-27}}} \approx 10^6\ m/s$$

(2.1) N kondensatorer med kapacitancen C var.

$$C_{par} = NC$$

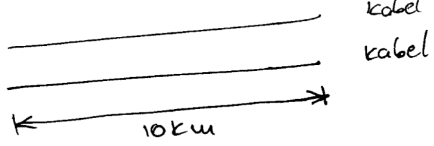
$$C_{serie} = \frac{C}{N} \quad \left(\text{pga } \frac{1}{C_{ser}} = \frac{N}{C}\right)$$

$$\frac{C_{par}}{C_{ser}} = 100 = \frac{NC}{\frac{C}{N}} = N^2$$

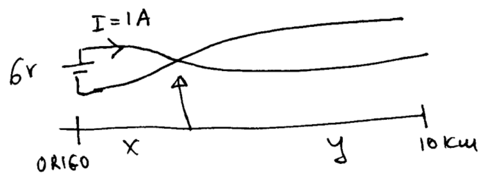
$$\underline{N = 10}$$

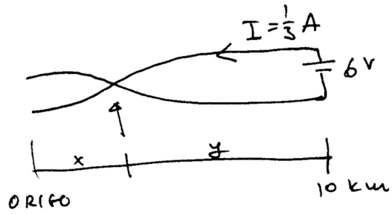
(3)

2.2 Före jordbärningen:



Efter jordbärningen:





$$x + y = 10$$

$$6 = \frac{1}{3} \cdot 2R_y$$

$$6 = 1 \cdot 2R_x$$

där R_x och R_y är resistanser hos en kabel som är x-km respektive y-km lång.

$$\Rightarrow \quad \frac{R_x}{R_y} = \frac{1}{3}$$

Men $R_x = \rho \frac{x}{S}$ och $R_y = \rho \frac{y}{S}$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \frac{1}{3} \\ x + y &= 10 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 2.5 \text{ km} \\ y &= 7.5 \text{ km} \end{aligned}$$

2.3.1 Svar b) är rätt. Man vill minska ρ för att minimera effekt dissipering.

2.3.2 Svar e) är rätt. Samma skäl som ovan.

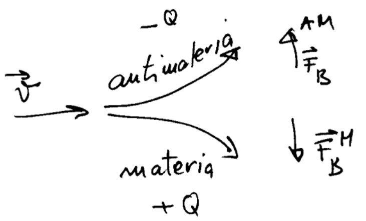
2.3.3 Svar h) är rätt

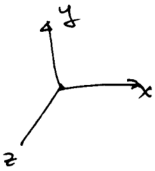
2.4

a) A lyser starkaste; B och C lyser lika mycket men svagare än A pga strömmen genom A är störst.

b) Kortslutning mellan 1 och 2 gör att ingen ström passerar genom B+C. B+C lyser ej. Strömmen genom A är större än i fallet a). A lyser starkare.

(3.1) (4)





$$\vec{F}_B = Q\,\vec{v}\times\vec{B}$$

antimateria : $-Q \Rightarrow F_B^{AM} = F_B\,\hat{y}$

materia : $+Q \Rightarrow F_B^{M} = -\cancel{F_B}\,\hat{y}$

Vi tillämpar höger hand regel $\Rightarrow$ B-fältet pekar ur papperet. $\vec{B} = B\,\hat{z}$.

(3.2)

- Segmenten AB och DC bidrar ej till B-fältet i P $(\vec{I}\times d\vec{r} = 0)$
- Segment BC ger ett B-fält i P som är riktad inn i papperet och har storlek

$$B_{BC} = \frac{1}{3}\,\frac{\mu_0 I}{2(a+b)} \quad (\text{inn i papper})$$

där faktor $1/3$ kommer pga vi har en tredjedel av ~~en~~ cirkulärströmsliga.

- Segment AD skapar B-fält i P som pekar ur papperet och har storlek:

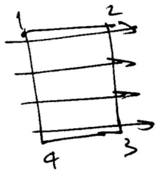
$$B_{AD} = \frac{1}{3}\,\mu_0\,\frac{I}{2a} \quad (\text{ur papperet})$$

Total B-fält i P är

$$B_T = B_{AD} - B_{BC} = \frac{1}{3}\mu_0 I\left(\frac{1}{2a} - \frac{1}{2(a+b)}\right) \quad \left(\text{riktad ur papper}\right)$$

(3.3) ⑤

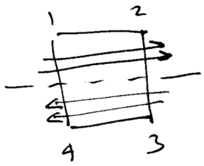
Slinga 1 :



$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \int_1^2 \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_2^3 \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_3^4 \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_4^1 \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$= 2\cdot 1 + \underset{\text{pga } \vec{B}\perp d\vec{s}}{0} - 2\cdot 1 + \underset{\vec{B}\perp d\vec{s}}{0} = \underline{0}$$

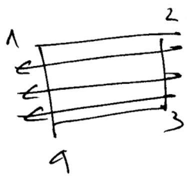
Slinga 2 :



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{B} d\vec{s} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{s} + \int_3^4 \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_4^1 \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$= 2\cdot 1 + 0 + 2\cdot 1 + 0 = \underline{4} \ (T\cdot m)$$

Slinga 3 :



$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{B}\cdot d\vec{s} + \int_2^3 \vec{B} d\vec{s} + \int_3^4 \vec{B} d\vec{s} + \int_4^1 \vec{B}\cdot d\vec{s}$$

$$= -2\cdot 1 + 0 + 2\cdot 1 + 0 = \underline{0}$$

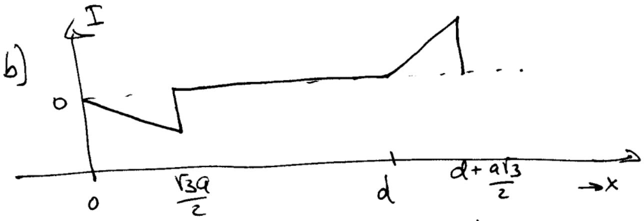
4.1 a) $I \neq 0$ bara när $\frac{d\phi_B}{dt} \neq 0$

Detta händer när

$x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right)$

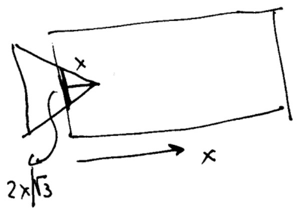
$x \in \left(d, d + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

b)



Strömmen går moturs pga $\phi_B \uparrow \Rightarrow I$ skapar Bind som håller ϕ_B konst $\Rightarrow$ I moturs

c) $I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\frac{d\phi_B}{dt}}{R} = \frac{\frac{d}{dt}(B \cdot A)}{R} = \frac{B\frac{dA}{dt}}{R}$

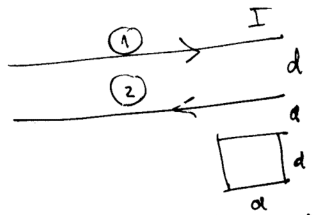


$A = \frac{2x}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x^2}{\sqrt{3}}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot 2x \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{2x}{\sqrt{3}} \cdot v$

$$I = \frac{B \cdot 2xv}{R\sqrt{3}}$$

4.2 B (lång tråd) $= \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$



$\phi_{B1} = \int_{2d}^{3d} \frac{\mu_0 I d\, dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{3}{2}$

$\phi_{B2} = \int_{d}^{2d} \frac{\mu_0 I d\, dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln 2$

$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\mu_0 I d}{2\pi} \ln \frac{4}{3}$

$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 d}{2\pi} \ln \frac{4}{3} \cdot \frac{dI}{dt} = \left(\ln \frac{4}{3}\right)\left(\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\right)(0.1)(2 \cdot 10^{-2}) = 1.1 \cdot 10^{-10}\ V$

5

Resonansfrekvens är:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Då om $\omega = 2\omega_0$ får vi:

$$X_L = \omega L = \frac{2}{\sqrt{LC}} \cdot L = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{\sqrt{LC}}{2C} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

a) $$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + 2.25\frac{L}{C}} = \sqrt{10^2 + 2.25 \cdot \frac{10 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-6}}} = \underline{18\Omega}$$

b) $$I_{RMS} = \frac{\Delta V_{RMS}}{Z} = \frac{\Delta V_{RMS}}{\sqrt{R^2 + 2.25\left(\frac{L}{C}\right)}} = \frac{50V}{18\Omega} = \underline{\underline{2.77A}}$$

c) Energi dissiperat per period

$$Q = P \cdot \Delta t = \frac{(\Delta V_{RMS})^2 R}{R^2 + 2.25\frac{L}{C}} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(\Delta V_{RMS})^2}{R^2 C + 2.25L} \cdot \pi\sqrt{LC}$$

$$Q = \underline{\underline{242 \text{ mJ}}}$$