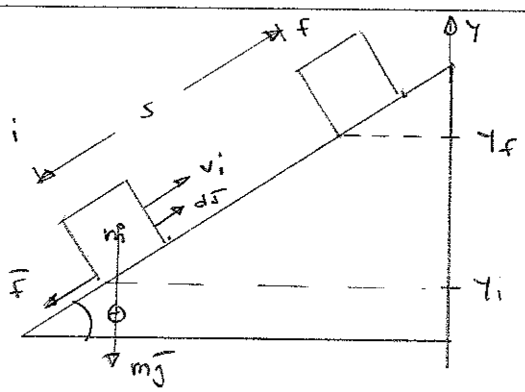
8.33

7.25

Lösning:



givet; $v_i = 8{,}00$ m/s $v_f = 0$
$\theta = 30°$ $m = 5{,}00$ kg
$s = 3{,}00$ m

a) ΔK:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\frac{1}{2}\, 5{,}0\,(8{,}00)^2 =$$
$$= \underline{\underline{-160\text{ J}}}$$

b) ΔU (i grav.fältet)

$$\Delta U = mg\,\Delta y = mg(y_f - y_i) = mg\, s \cdot \sin\theta =$$
$$= 5{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}00 \sin 30° = \underline{\underline{73{,}5\text{ J}}}$$

c) friktionskraften $|\bar{f}|$: $\bar{F} = \bar{f} + m\bar{g}$

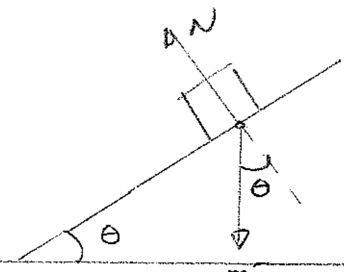
$$\int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

$$\int_i^f (\bar{f} + m\bar{g}) \cdot d\bar{s} = \int_i^f \bar{f} \cdot d\bar{s} + \int_i^f m\bar{g} \cdot d\bar{s} = -fs + (-\Delta U)$$

$$\Rightarrow -fs - \Delta U = \Delta K \quad \Rightarrow f = -\frac{\Delta K + \Delta U}{s} = -\frac{(-160) + 73{,}5}{3{,}00} =$$
$$= \underline{\underline{28{,}8\text{ N}}}$$

d) μ_k:

$$\left.\begin{aligned} f &= \mu_k \cdot N \\ N &= mg \cdot \cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow f = \mu_k\, mg \cos\theta$$
$$\Rightarrow \mu_k = \frac{f}{mg \cdot \cos\theta} = \underline{\underline{0{,}678}}$$

Obs!
$$\int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

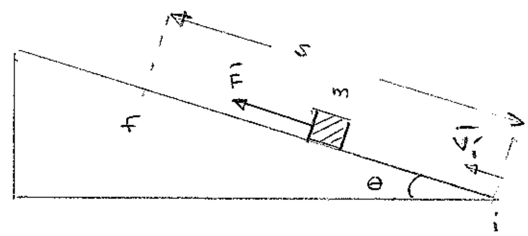
Om endast konservativa krafter verkar: $\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$

$$\therefore \int_i^f \bar{F}_c \cdot d\bar{s} = -\Delta U$$

7.33

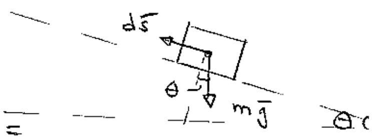
Lösning:

givet: $s = 5{,}0$ m $m = 10{,}0$ kg
$\mu_k = 0{,}400$ $V_i = 1{,}50$ m/s
$F = 100$ N $\theta = 20°$



a) Arbetet som gravitationskraften uträttar $i \to f$

$$dW_g = \bar{F}_g \cdot d\bar{s} = m\bar{g} \cdot d\bar{s} = -mg\sin\theta \, ds$$

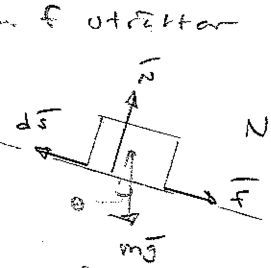


$$W_g = \int_i^f \bar{F}_g \cdot d\bar{s} = -\int_i^f mg\sin\theta \, ds = -mg\sin\theta \int_i^f ds =$$

$$= -mg\sin\theta \cdot s = -167{,}76 \text{ J} = \underline{\underline{-1{,}7 \cdot 10^2 \text{ J}}}$$

b) Ökningen av den inre energin hos lutande plan + låda under $i \to f$:
= beloppet av det arbete som friktionskraften $\bar{f}$ uträttar $i \to f$

$$\left.\begin{array}{l} f = \mu_k N \\ N = mg\cos\theta \end{array}\right\} \Rightarrow f = \mu_k mg\cos\theta$$



$N = mg \cdot \cos\theta$

$$W_f = \int_i^f \bar{f} \cdot d\bar{s} = -\mu_k mg\cos\theta \int_i^f ds =$$

$$= -\mu_k mg\cos\theta \cdot s = -0{,}400 \cdot 10{,}0 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 20° \cdot 5{,}0 = -184{,}36 \text{ J}$$

$\Rightarrow$ svar: 184 J. egentligen $1{,}8 \cdot 10^2$ J

---

c) Arbetet som $\bar{F}$ uträttar $i \to f$:

$$W_F = \int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{s} = Fs = 100 \cdot 5{,}0 = \underline{\underline{5{,}0 \cdot 10^2 \text{ N}}}$$

---

d) Ändringen i kinetisk energi $i \to f$:

$$\Delta K = W_F + W_g + W_f = 500 - 167{,}76 - 184{,}36 = 147{,}8 \text{ J} = \underline{\underline{148 \text{ J}}}$$

---

e) Fart i punkten f:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2\,\Delta K}{m} + v_i^2} =$$

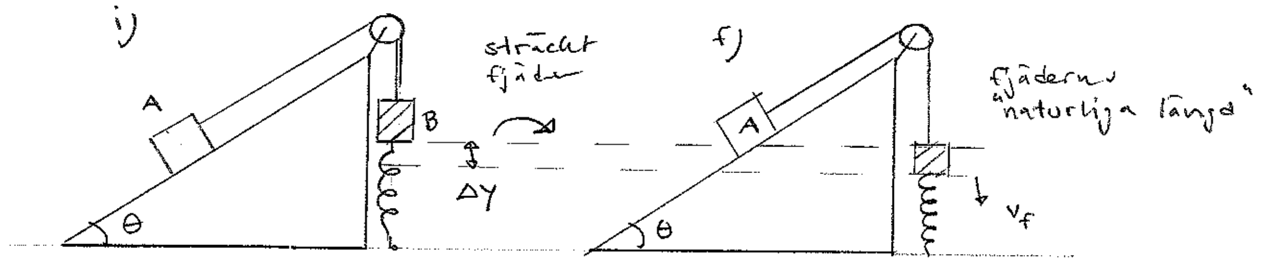
$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 147{,}8}{10{,}0} + 1{,}50^2} = \underline{\underline{5{,}6 \text{ m/s}}}$$

7 59

7.59

Lösning:

friktionsfritt



Givet: $\theta = 40^\circ$ $m_A = 20{,}0$ kg $m_B = 30{,}0$ kg $k = 250$ N/m
$\Delta y = 0{,}20$ m $v_i = 0$ f: fjädern relaxerad.
Sökt: v_f

Den mekaniska energin bevaras eftersom de krafter som är relevanta är konservativa.

$$\Rightarrow \Delta E_{mek} = E_{mek,f} - E_{mek,i} \quad \text{dvs "(efter)} - \text{(före)"} = 0$$

$$\Delta E_{mek} = \Delta E_{mek,A} + \Delta E_{mek,B} + \Delta E_{mek,\,fjäder} = 0$$

$$\Delta E_{mek,A} = \frac{1}{2} m_A v_f^2 + m_A g \Delta y \cdot \sin\theta$$

$$\Delta E_{mek,B} = \frac{1}{2} m_B v_f^2 - m_B g \Delta y - 0$$

$$\Delta E_{mek,fj} = 0 - \frac{1}{2} k(\Delta y^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_f^2 + m_A g \Delta y \sin\theta + \frac{1}{2} m_B v_f^2 - m_B g \Delta y - \frac{1}{2} k(\Delta y)^2$$

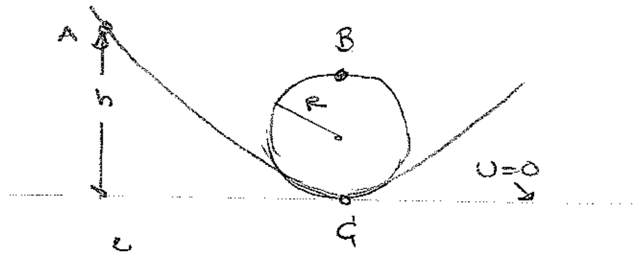
$$\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 g \Delta y \left(\frac{m_B}{m_A} - \sin\theta\right) + \frac{k}{m_A}(\Delta y)^2}{1 + \frac{m_B}{m_A}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}20\left(\frac{30}{20} - \sin 40\right) + \frac{250}{20}(0{,}20)^2}{1 + \frac{30}{20}}} = \underline{\underline{1{,}24 \text{ m/s}}}$$

(8 73) 7.62

Lösning:

a)



B: $m\frac{v_B^2}{R} = mg + N$

$N_{min} = 0$

$\Rightarrow m\frac{v_B^2}{R} > mg$

$\Rightarrow v_B^2 > gR$

A: mgh

B: $\frac{1}{2}mv_B^2 + 2Rgm$

$\therefore mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2Rgm \quad \Rightarrow \cancel{m}gh > \frac{1}{2}\cancel{m}gR + 2Rg\cancel{m}$

$\Rightarrow \boxed{h_{min} = 2\frac{1}{2}R}$

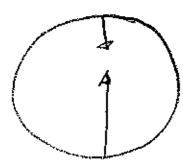
---

b) $h > 2\frac{1}{2}R$: Skillnad i normalkraft $N_C - N_B$:

$$\left.\begin{aligned} B: \quad & m\frac{v_B^2}{R} = mg + N_B \\ C: \quad & m\frac{v_C^2}{R} = N_C - mg \end{aligned}\right\} \Rightarrow N_C - N_B = 2mg + \frac{m}{R}(v_C^2 - v_B^2)$$

energiprincipen: $\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2Rmg$

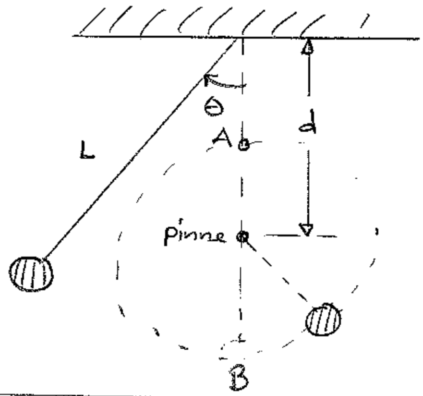
$\Rightarrow v_C^2 - v_B^2 = 4Rg$



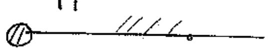
$\Rightarrow N_C - N_B = 2mg + \frac{m}{R}\cdot 4Rg = \underline{\underline{6mg}}$

(8.72) 7.61

Lösning:



Pendeln släpps från $\theta = 90^\circ$

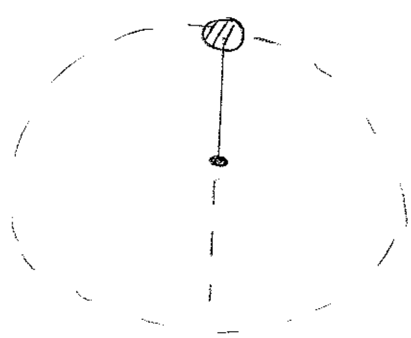
dvs  i)

Visa att $d_{min} = \frac{3}{5}L$ om pendeln ska kunna gå i en cirkulär bana runt pinnen.

Det kritiska läget är A:

radien i den cirkulära banan runt pinnen:

$$r = (L-d)$$



spänkraften T i snöret ges i A av

$$m\frac{v_A^2}{r} = mg + T$$

där $T \geq 0$

$$\Rightarrow m\frac{v_A^2}{r} > mg \Rightarrow \frac{v_A^2}{(L-d)} > g$$

---

sätt den potentiella energin = 0 i läge B

i): $U_i = mgL \quad K_i = 0$

A): $U_A = mg\,2r = mg\,2(L-d)$, $K_A = \frac{1}{2}mv_A^2$

mek. energin bevaras: $mgL = mg\,2(L-d) + \frac{1}{2}mv_A^2$

$\Rightarrow 2gL = 4gL - 4gd + v_A^2 \quad \Rightarrow v_A^2 = 4gd - 2gL$

$$\Rightarrow \frac{v_A^2}{L-d} > g \Rightarrow \frac{4gd-2gL}{L-d} > g \Rightarrow 4d - 2L > L - d \Rightarrow 5d > 3L$$

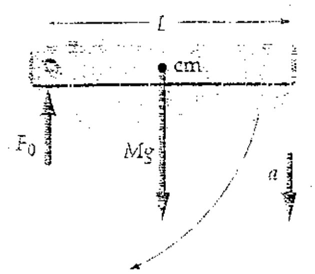
$$\Rightarrow \underline{\underline{d > \frac{3}{5}L}}$$ V.S.V.

(1)

En fönsterputsare lutar sin 3,0 m långa stege mot en husvägg. Vinkeln mellan stegen och husväggen är 22 grader. Stegen har åtta pinnar och dessa befinner sig 0,33 m från varandra. Understa och översta pinnen befinner sig på detta avstånd från stegens undre respektive nedre ända. Stegen har försumbar massa och fönsterputsaren har massan 85 kg. Den statiska friktionskoefficienten mellan stege och trottoar är 0,51, men friktionen mellan stegens överkant och husväggen är försumbar.
Avgör om stegen kommer att vara stabil om fönsterputsaren klättrar upp till stegens sjunde pinne. (4 p)

(2)

En uniform stav med längden $L = 0{,}8$ m och massan $M = 2{,}0$ kg är friktionsfritt ledad i ena änden. Den släpps från ett horisontellt läge. Bestäm vinkelaccelerationen omedelbart efter att den har släppts samt den kraft F_0 som staven utövar på leden.



(3)

a Visa att en cylinders tröghetsmoment med avseende på axeln är $1/2\ MR^2$.

b En cylinder med massan M och radien R startar från vila och rullar utan att glida nedför en backe. Dess tyngdpunkt sänker sig därmed sträckan $h = 2{,}0$ m. Hur stor är cylinderns fart v när den nått botten av backen?

④

En liten massa m sitter fast i ett snöre som går igenom ett hål i en friktionslös horisontell yta. Massan snurrar ursprungligen runt i en cirkel vars radie är r_0 med en hastighet v_0. Någon drar sedan sakta i snöret från undersidan som figuren visar, varvid cirkelradien minskar till r.

$r = 0{,}100$ m, $r_0 = 0{,}300$ m, $m = 50{,}0$ g och $v_0 = 1{,}50$ m/s

a. Bestäm hastigheten hos massan när radien är r.

b. Bestäm spänningen i tråden som funktion av r.

c. Hur mycket arbete uträttas när massan flyttas från r_0 till r?

(12 p)

⑤

En hungrig björn vars vikt är w_1 promenerar ut på en balk i ett försök att hämta en matkorg (vikt w_3) som hänger i dess ände. Balken är uniform, väger w_2 och har längden l.

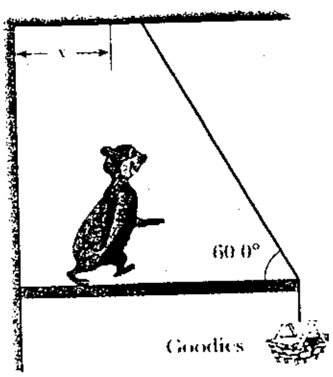
$w_1 = 700$ N, $w_2 = 200$ N, $w_3 = 80$ N, $l = 6{,}00$ m.

a. Frilägg balken och rita ett kraftdiagram.

b. Bestäm spännkraften i snöret och kraften (uppdelad i komponenter) på väggen vid balkens fäste i väggen när björnen befinner sig på avståndet l/6 från fästpunkten.

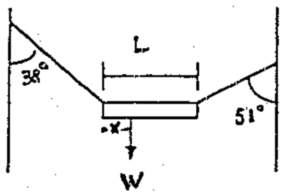
c. Hur långt ut på balken kan björnen gå utan att snöret brister om spännkraften i snöret högst kan vara 900 N?

(12 p)



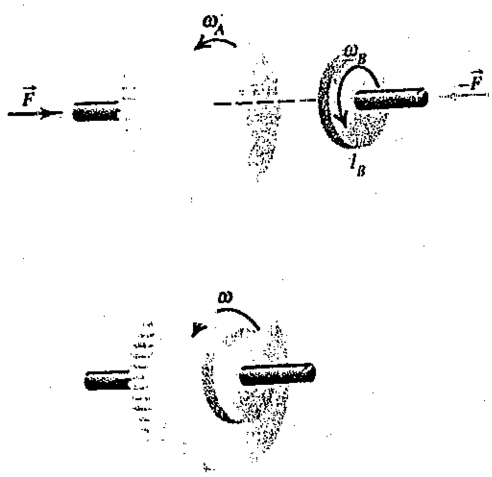
6

En stav är upphängd och befinner sig i vila i horisontalplanet med hjälp av masslösa trådar enligt figuren nedan. Stavens längd är 6,0 m och den ser visserligen uniform ut på bilden men det är den inte, dvs tyndpunkten ligger inte i dess mitt.
Bestäm avståndet x mellan tyngdpunkten och stavens vänsterkant.



7.

Figuren nedan visar en del av en motor. De två skivorna roterar ursprungligen med olika hastigheter men bringas med hjälp av krafter i enlighet med de i figuren i kontakt med varandra mot och roterar efter kontakten med gemensam hastighet.
Antag att den större skivan har massan 2,0 kg, en radie på 0,20 m och en rotationshastighet som är 50 rad/s och att motsvarabde värden för den mindre är 4,0 kg, 0,10 m och 200 rad/s.
Bestäm den gemensamma vinkelhastigheten efter att skivorna fått kontakt.
Jämför kinetiska energin före och efter kontakt och förklara skillnaden.

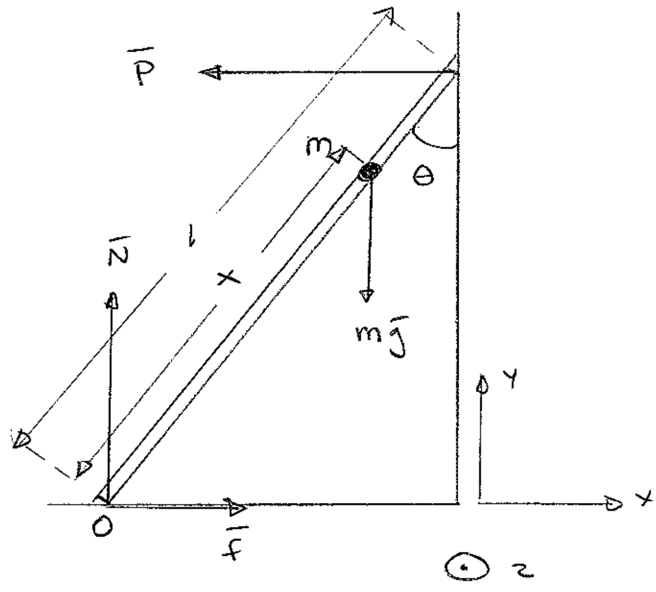


8

En enkel jo-jo består av ett snöre som är lindat runt en solid cylinder med massa M och radie R. Om man håller änden av snöret stilla och släpper cylindern så kommer den att sänkas under rotation.
Bestäm accelerationen hos cylinderns tyndpunkt och spännkraften i snöret. Cylinderns tröghetsmoment är $1/2\ MR^2$. (4 p)

(1) $l = 3{,}0\ m \quad \theta = 22^\circ$

$m = 85\ kg \quad \mu_s = 0{,}51$



Stabilitetsvillkor:

$\sum_i \bar{F}_i = 0$ Kraftbalans

$\sum_i \bar{\tau}_i = 0$ Momentbalans.

$N = mg$

$f_{max} = \mu_s mg$

Kraftbalans:

y-led: $N = mg$

x-led: $f_{max} = \mu_s mg = P_{max}$ $\therefore$ $\boxed{P_{max} = \mu_s mg}$

Vridande moment. Val av axel godtycklig men vi väljer här en axel // $\bar{z}$-axeln

$$\sum_i \tau_{i0} = mg(x \sin\theta) - P(l \cos\theta) = 0$$

$$\Rightarrow mg\, x \cdot \sin\theta = \mu_s mg \cdot l \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow x = l \cdot \mu_s \cdot \cot\theta = 3{,}0 \cdot 0{,}51 \cdot \cot 22^\circ =$$

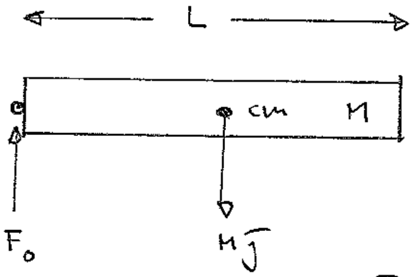
$$= 3{,}79\ m$$

$\therefore$ Målaren kan klättra upp till stegens topp utan att den välter.

(2)

Givet
$M = 2{,}0\ kg$
$L = 0{,}8\ m$

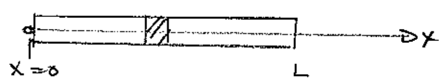
Sökt : α_0, F_0



I början av rörelsen är kraften på leden motriktad Mg ty $v_{cm} = 0$ men $\frac{dv_{cm}}{dt} \neq 0$ dvs $F_0 = M\frac{dv}{dt}$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i F_i = Mg - F_0 = a_{cm} \cdot M \\ &\sum_i \tau_i = \left(\frac{L}{2}\right) \cdot Mg = I \cdot \alpha \\ &a_{cm} = \frac{L}{2} \cdot \alpha \end{aligned}\right\}$$

I för en pinne ledad i ena änden (jämntjock, homogen)



$$\left.\begin{aligned} &I = \int_0^L dm \cdot x^2 \\ &dm = \frac{M}{L} \cdot dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 \cdot dx = \frac{M}{L}\frac{1}{3}L^3 = \frac{1}{3}ML^2$$

$$\therefore \quad \frac{L}{2}Mg = I\alpha = \frac{1}{3}ML^2\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\frac{L}{2}Mg}{\frac{1}{3}ML^2} = \frac{3}{2}\frac{g}{L} =$$

$$= \frac{3}{2}\frac{9{,}81}{0{,}8}\ rad/s^2 = \underline{\underline{18{,}4\ rad/s^2}}$$

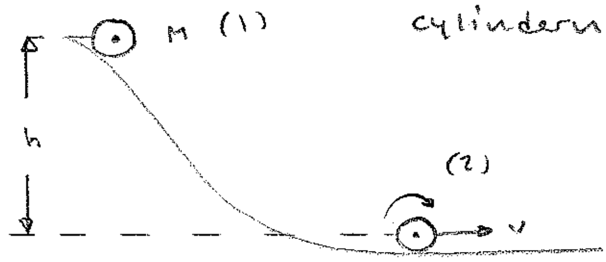
F_0 :
$$\left.\begin{aligned} &Mg - F_0 = Ma_{cm} \\ &a_{cm} = \frac{L}{2}\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow Mg - F_0 = M\frac{L}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{g}{L}$$

$$\Rightarrow F_0 = Mg - M\frac{3}{4}g = \frac{1}{4}Mg =$$

$$= \frac{1}{4}\,2{,}0 \cdot 9{,}81\ N = \underline{\underline{4{,}9\ N}}$$

③

$h = 2{,}0$ m



cylindern: M
R

Den mekaniska energin bevaras.

Cylinderns potentiella energi i (1) omvandlas i potentiell energi + kinetisk energi i (2).

Den kinetiska energin i (2) består av två delar

a) Tyngdpunktens translationsenergi: $\frac{1}{2}Mv^2$

b) Rotationsenergi förknippad med rotation runt tyngdpunkten: $\frac{1}{2}I\omega^2$

Cylinderns tröghetsmoment $I = \frac{1}{2}MR^2$

Samband mellan ω och v eftersom cylindern rullar utan att glida: $v = \omega R$

Sätt $E_{pot} = 0$ i läge (2)

Mek. en. (1) = Mek. en (2) ger

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$\Rightarrow gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 = \frac{3}{4}v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 9{,}81 \cdot 2{,}0}{3}}\ \text{m/s} = \underline{5{,}1\ \text{m/s}}$$

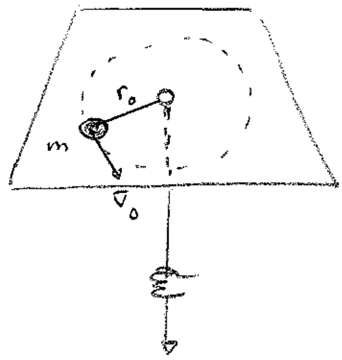
4

Givet: $r_0 = 0{,}300$ m

$r = 0{,}100$ m

$m = 50{,}0$ g

$v_0 = 1{,}50$ m/s

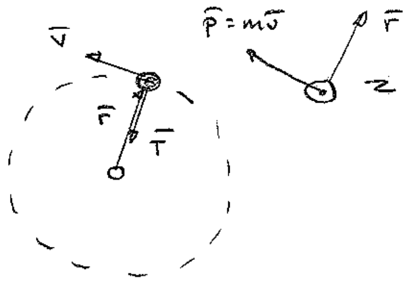


Sökt: $v(r)$

$T(r)$

$W_{r_0 \to r}$

Inga yttre vridande moment m.a.p en axel genom hålet i skivan $\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{T} = 0$



$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\tau} = 0$$

$\therefore$ $\bar{L}$ är konstant i tiden

$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = L_z \hat{z}$ ober. av r

a) $L_{r_0} = m v_0 r_0 = L_r = m v \cdot r \Rightarrow v_0 r_0 = v \cdot r \Rightarrow \underline{\underline{v(r) = \frac{r_0 v_0}{r}}}$

b) $T = m \frac{v^2}{r} = \underline{\underline{\frac{m r_0^2 v_0^2}{r^3}}}$

c) Arbetet:

$$W_{r_0 \to r} = \int_{r_0}^{r} \bar{T} \cdot d\bar{r} = \int_{r_0}^{r} \left(- \frac{m r_0^2 v_0^2}{r^3} \hat{r} \right) \cdot dr \, \hat{r} =$$

$$= - m r_0^2 v_0^2 \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r^3} = - m r_0^2 v_0^2 \left[- \frac{1}{2} r^{-2} \right]_{r_0}^{r} =$$

$$= \frac{m r_0^2 v_0^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2} \right) = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1 \right) =$$

$$= \left[r_0 = 3r \right] = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(3^2 - 1 \right) = 8 \cdot \frac{1}{2} m v_0^2 =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \, 0{,}050 \cdot 1{,}50^2 \text{ J} = \underline{0{,}45 \text{ J}}$$

alt. $W_{r_0 \to r} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \left[v = \frac{r_0}{r} v_0 = 3 v_0 \right] =$

$= \frac{1}{2} m v_0^2 (9 - 1)$

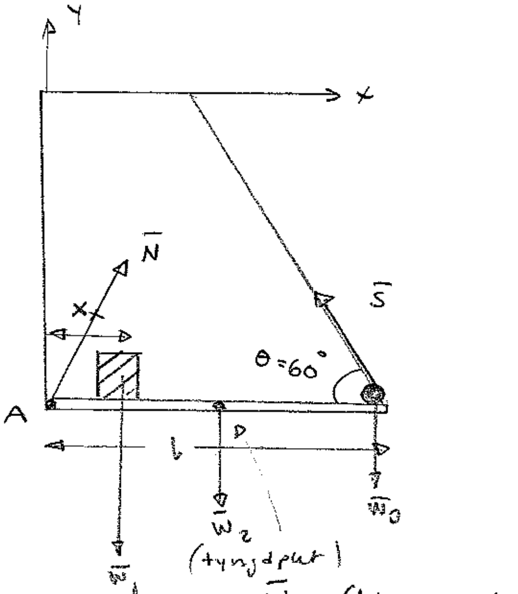
(5)

balk + björn + matkorg

Hela systemet står stilla, det varesig translateras eller roteras

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_i \bar{F}_i = 0 \quad \begin{matrix} \nearrow \sum_i F_{ix} = 0 \quad (1) \\ \searrow \sum_i F_{iy} = 0 \quad (2) \end{matrix} \\ \sum_i \bar{\tau}_i = 0 \quad (3) \end{cases}$$

a)



$w_1 = 700\,N$, $w_2 = 200\,N$, $w_3 = 80\,N$, $l = 6{,}0\,m$

$\bar{N} = (N_x, N_y)$

$\bar{S} = (S_x, S_y)$

Krafter: Förutom tyngdkrafterna $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ och $\bar{w}_3$ har vi spännkraften från snöret $\bar{S}$ och den kraft $\bar{N}$ som fastsättningen i väggen verkar med. Vinkeln mellan balk och $\bar{N}$ är okänd, medan vinkeln mellan $\bar{S}$ och balken är 60°.

$$(1) \text{ ger: } N_x - S_x = 0 \Rightarrow N_x - S \cdot \underbrace{\cos\theta}_{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow N_x = \frac{S}{2} \quad (4)$$

$$(2) \text{ ger: } \left.\begin{matrix} N_y + S_y - w_1 - w_2 - w_3 = 0 \\ S_y = \frac{\sqrt{3}}{2} S \end{matrix}\right\} \Rightarrow N_y = -\frac{\sqrt{3}}{2} S + w_1 + w_2 + w_3 \quad (5)$$

Om vi har jämvikt så vet vi att $\sum_i \bar{\tau}_i = 0$ oavsett m.a.p vilken axel vi beräknar momenten. Om vi gör beräkningen m.a.p fastsättningspunkten A i väggen får vi uttryck som inte innehåller N (momentarm = 0) vilket förenklar beräkningarna

$$\therefore \sum_i \bar{\tau}_{i,A} = \bar{l} \times \bar{S} + \bar{l} \times \bar{w}_3 + \frac{\bar{l}}{2} \times \bar{w}_2 + \bar{x} \times \bar{w}_1 = 0$$

$$\Rightarrow l \cdot S_y - l \cdot w_3 - \frac{l}{2} w_2 - x\, w_1 = 0 = l\left(\frac{\sqrt{3}}{2} S - w_3 - \frac{1}{2} w_2 - \frac{x}{l} w_1\right) \quad (6)$$

b) S om $\frac{x}{l} = \frac{1}{6}$ ges av (6)

$$S = \frac{2\,(80 + 100 + \frac{1}{6}700)}{\sqrt{3}}\,N = \underline{\underline{349\,N}} \Rightarrow N_x = \frac{S}{2} = \underline{\underline{175\,N}}$$

$$(5) \text{ ger } N_y = 700 + 200 + 80 - \frac{\sqrt{3}}{2} 349 = \underline{\underline{683\,N}}$$

c) $S \le 900\,N$ hur stort kan x vara (x_{max})?

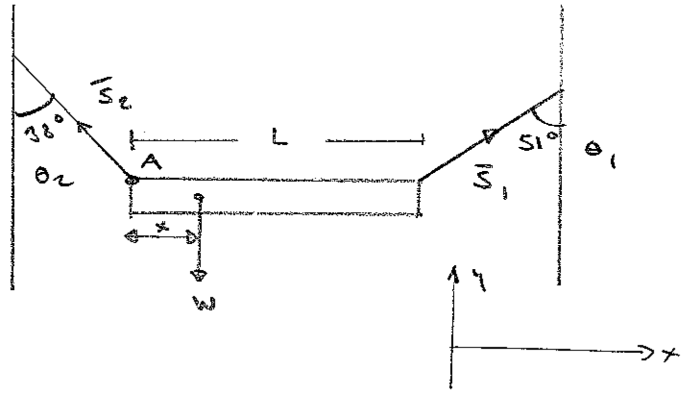
$$(6) \text{ ger } \frac{x_{max}}{l} = \frac{1}{w_1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} S_{max} - w_3 - \frac{w_2}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{700}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 900 - 80 - \frac{200}{2}\right) = 0{,}856 \Rightarrow x_{max} = 6{,}0 \cdot 0{,}856$$

$$= \underline{\underline{5{,}1\,m}}$$

(6)

$L = 6{,}0$ m



Jämvikt:

$\sum_i \bar{F}_i = 0$ (1)

$\sum_i \bar{P}_i = 0$ (2)

(1) ger x_{led} : $S_1 \cdot \sin\theta_1 - S_2 \cdot \sin\theta_2 = 0$ (3)

y-led : $S_1 \cos\theta_1 + S_2 \cos\theta_2 - W = 0$ (4)

(2) ger (map en axel vinkelrätt mot papperet genom A)

$x \cdot W = S_1 \cdot \cos\theta_1 \cdot L$ (3) (S_2 ger inget mom m.a.p på A)

3 obekanta S_1, S_2 och x och 3 ekvationer.

Lös ut x!

(1) ger $S_2 = S_1 \dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}$

sätt in i (2)

$$\Rightarrow S_1 \cos\theta_1 + S_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} \cdot \cos\theta_2 - W = 0$$

$$\Rightarrow W = S_1 \left(\cos\theta_1 + \frac{\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2}{\sin\theta_2} \right)$$

sätt in i (3)

$$\Rightarrow x S_1 \left(\cos\theta_1 + \frac{\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2}{\sin\theta_2} \right) = S_1 \cdot \cos\theta_1 \; L$$

$$\Rightarrow x \left(1 + \frac{\tan\theta_1}{\tan\theta_2} \right) = L \Rightarrow x \cdot \frac{\tan\theta_2 + \tan\theta_1}{\tan\theta_2} = L$$

$$\Rightarrow x = \frac{\tan 38^\circ}{\tan 38^\circ + \tan 51^\circ} L = 0{,}38\, L = \underline{\underline{2{,}33 \text{ m}}}$$

(7)

Givet: $M_A = 2{,}0$ kg

$R_A = 0{,}20$ m

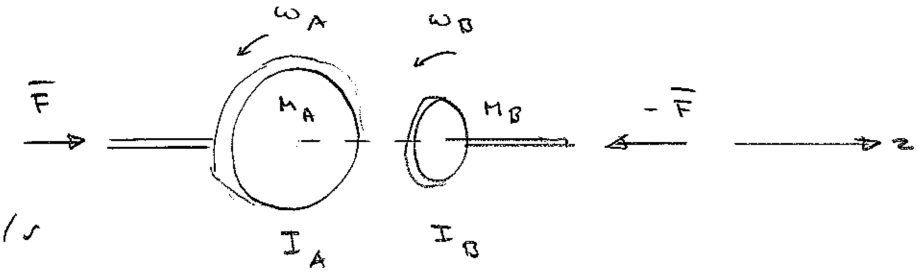
$\omega_A = 50$ rad/s

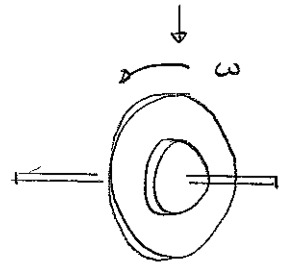
$M_B = 4{,}0$ kg

$R_B = 0{,}10$ m

$\omega_B = 200$ rad/s

Sökt: ω





$\bar{F}$ och $-\bar{F}$ ger moment $=0$ m.a.p. z-axeln

$\Rightarrow L_z$ är konstant, $L_i = \omega_i I_i$

$\therefore \quad L_{zi} = \omega_A \cdot I_A + \omega_B \cdot I_B$, $L_{zf} = \omega I_A + \omega I_B = \omega(I_A + I_B)$

Cylindrar (skivor): $I_z = \frac{1}{2} M R^2$

$$L_{zi} = L_{zf} \Rightarrow \omega_A \cdot \frac{1}{2} M_A R_A^2 + \omega_B \frac{1}{2} M_B R_B^2 = \omega\left(\frac{1}{2} M_A R_A^2 + \frac{1}{2} M_B R_B^2\right)$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1 + \frac{\omega_B}{\omega_A} \frac{M_B}{M_A} \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2}{1 + \frac{M_A}{M_B}\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2} \omega_A =$$

$$= \frac{1 + 4 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} \omega_A = \frac{1+2}{1+\frac{1}{2}} \omega_A = \frac{3}{\frac{3}{2}} \omega_A$$

$$= 2\omega_A = \underline{200 \text{ rad/s}}$$

kinetisk energi:

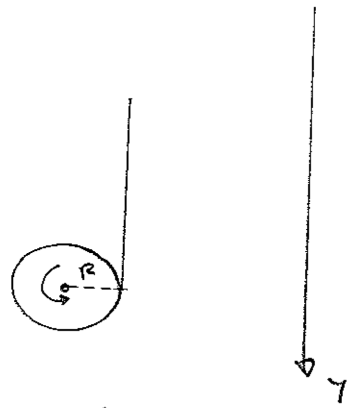
$K_i = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 = 450$ J

$K_f = \frac{1}{2}(I_A + I_B)\omega^2 = 300$ J

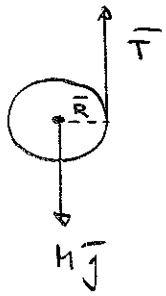
$\therefore$ 150 J åtgår i friktionsvärme när den gemensamma hastigheten åstadkoms.

8

$\sum_i \bar{F}_i$ åstadkommer (vanlig) acceleration av jo-jons tyngdpunkt:



$$\sum_i \bar{F}_i = \sum_i F_{yi} = Mg - T = M \cdot a$$



$\odot\ \hat{z}$

$\sum_i \bar{\tau}_i$ åstadkommer rotation runt en axel genom tyngdpunkten ($\bar{z}$-axeln) vinkelacceleration $= \alpha$

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i \bar{\tau}_{iz} = \bar{R} \times \bar{T} \Rightarrow RT \cdot \hat{z} \\ \bar{\omega} = \omega \hat{z} \end{array}\right\} \Rightarrow RT = I_z \alpha$$

(Vi har antagit att jo-jon är fylld med snöre ända ut till randen på trissan. När snöre förbrukas blir snörrullens radie allt mindre, vilket påverkar τ)

$$v = \omega \cdot R \Rightarrow \frac{dv}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a = R \cdot \dot{\omega}$$

Vi har alltså

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & Mg - T = Ma \\ (2) & RT = \frac{1}{2} M R^2 \cdot \alpha \\ (3) & a = R\alpha \end{array}\right\}$$

(3) ger $\alpha = \frac{a}{R}$, vilket insättes i (2)

$$\Rightarrow RT = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M a$$

sätt in detta i (1) $\Rightarrow$ $Mg - \frac{1}{2} Ma = M a$

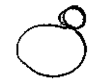
$$\Rightarrow \underline{a = \frac{2}{3} g} \qquad \text{och} \qquad T = \frac{1}{2} M\left(\frac{2}{3} g\right) = \underline{\frac{1}{3} Mg}$$

A puck of mass 80.0 g and radius 4.00 cm slides along an air table at a speed of 1.50 m/s as shown in Figure P11.34a. It makes a glancing collision with a second puck of radius 6.00 cm and mass 120 g (initially at rest) such that their rims just touch. Because their rims are coated with instant-acting glue, the pucks stick together and spin after the collision (Fig. P11.34b). (a) What is the angular momentum of the system relative to the center of mass? (b) What is the angular speed about the center of mass?

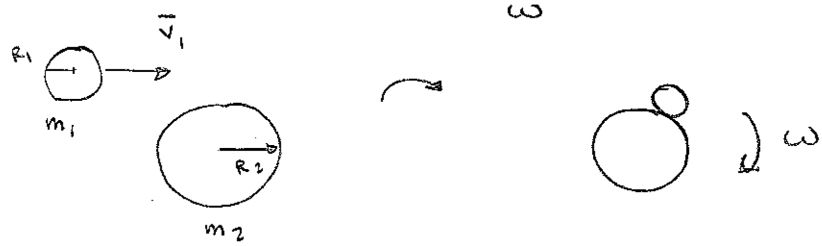
(10 34) ①

Givet: $m_1 = 80{,}0\,g$ $R_1 = 4{,}00\,cm$ $v_1 = 1{,}50\,m/s$

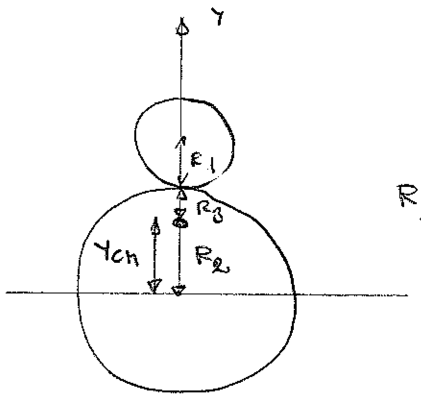
$m_2 = 120\,g$ $R_2 = 6{,}00\,cm$

Sökt: L relativt masscentrum hos 

ω



a) Bestäm masscentrum för det samman-slagna systemet.



$$\bar{Y}_{CM} = \frac{m_1(R_2+R_1) + 0}{m_1+m_2}\hat{Y} =$$

$$= \frac{80{,}0\,(0{,}06 + 0{,}04)}{80+120}\hat{Y} = 0{,}04$$

$$= \underline{\underline{4\,cm}}$$

$R_2 - Y_{CM} = R_3$

$R_3 = 2{,}00\,cm$

b) L map $\bar{Y}_{CM}$

Omedelbart före kollision: $V_{stor} = 0$

$$\bar{L}_i = -m_1 v_1 (R_1 + R_3)\hat{z} = -0{,}080 \cdot 1{,}5\,(4{,}00 + 2{,}00)\hat{z} =$$

$$= \underline{\underline{-7{,}20 \cdot 10^{-3}\hat{z}\,kgm/s}}$$

c) ω: L bevaras $L_f = I_1\omega + I_2\omega$

I_1 = tröghetsmomentet m.a.p. $\bar{Y}_{CM}$ (liten)

I_2 = —— " —— (stor)

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + m_1(R_1+R_3)^2 = \frac{1}{2}0{,}080 \cdot 0{,}04^2 + 0{,}080\,(0{,}04 + 0{,}02)^2 =$$

$$= 3{,}52 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2 + m_2Y_{CM}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}0{,}120 \cdot 0{,}06^2 + 0{,}120 \cdot 0{,}04^2 = 4{,}08 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

$$\Rightarrow I_{tot} = I_1 + I_2 = \underline{\underline{7{,}60\,kgm^2}}$$

10.34 forts.

$$L_i = L_f = I_{tot} \cdot \omega$$

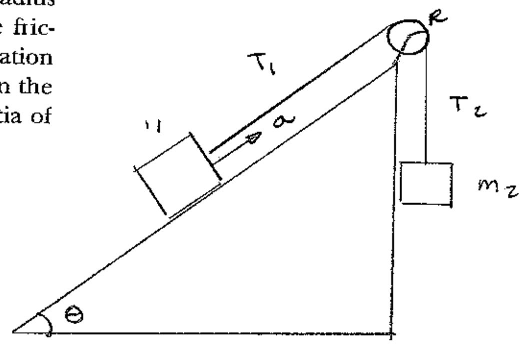
$$\Rightarrow \omega = \frac{L_i}{I_{tot}} = \frac{7{,}20 \cdot 10^{-6}}{7{,}60 \cdot 10^{-7}} \text{ rad/s} =$$

$$= \underline{\underline{9{,}47 \text{ rad/s}}}$$

71. Two blocks, as shown in Figure P10.71, are connected by a string of negligible mass passing over a pulley of radius 0.250 m and moment of inertia I. The block on the frictionless incline is moving up with a constant acceleration of 2.00 m/s². (a) Determine T_1 and T_2, the tensions in the two parts of the string. (b) Find the moment of inertia of the pulley.

10.71

10 37



Givet: $\theta = 37{,}0^\circ$

$m_1 = 15{,}0$ kg

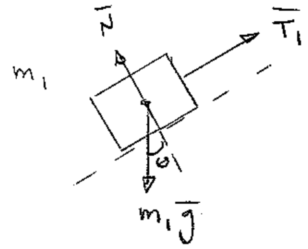
$m_2 = 20{,}0$ kg

$a = 2{,}00$ m/s²

$R = 0{,}250$ m

Sökt: T_1, T_2 samt trissans tröghetsmoment.

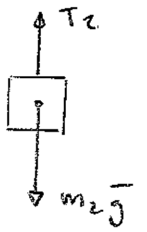
Friläggning



$$\boxed{T_1 - m_1 g \cdot \sin\theta = m_1 a} \quad (1)$$

$$\Rightarrow T_1 = m_1(a + g\sin\theta)$$

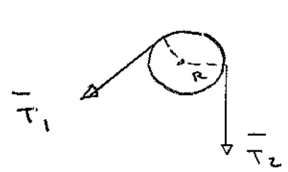
$$\Rightarrow T_1 = 15{,}0(2{,}00 + 9{,}81 \cdot \sin 37^\circ) = $$
$$= \underline{\underline{118\text{ N}}}$$



$$\boxed{m_2 g - T_2 = m_2 a} \quad (2)$$

$$\Rightarrow T_2 = m_2(g - a)$$

$$\Rightarrow T_2 = 20{,}0(9{,}81 - 2{,}00) = \underline{\underline{156\text{ N}}}$$



$$\tau_{netto} = T_2 R - T_1 R = I \cdot \alpha = I\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{(T_2 - T_1)R = I\frac{a}{R}} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \left[m_2(g-a) - m_1(a + g\cdot\sin\theta)\right]R = I\frac{a}{R}$$

$$\Rightarrow I = \left[m_2\left(\frac{g}{a} - 1\right) - m_1\left(1 + \frac{g}{a}\sin\theta\right)\right]R^2 =$$

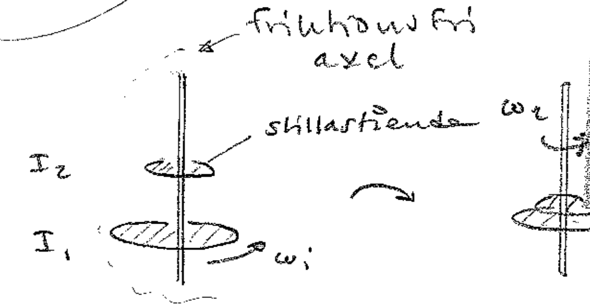
$$= \Big[\underbrace{20{,}0\left(\frac{9{,}81}{2{,}00} - 1\right)}_{78{,}1} - \underbrace{15{,}0\left(1 + \frac{9{,}81}{2{,}00}\sin 37^\circ\right)}_{59{,}2}\Big]0{,}250^2 =$$

$$= \underline{\underline{1{,}18\text{ kg m}^2}}$$

10.45

11.28

A cylinder with moment of inertia I_1 rotates about a vertical, frictionless axle with angular speed ω_i. A second cylinder, this one having moment of inertia I_2 and initially not rotating, drops onto the first cylinder (Fig. P11.28). Because of friction between the surfaces, the two eventually reach the same angular speed ω_f. (a) Calculate ω_f. (b) Show that the kinetic energy of the system decreases in this interaction, and calculate the ratio of the final to the initial rotational energy.



a) ω_f :

Inga yttre vridande moment verkar på systemet

$\Rightarrow \bar{L}_i = \bar{L}_f$

$$\left.\begin{aligned} L_i &= I_1\omega_i + 0 \\ L_f &= I_1\omega_f + I_2\omega_f \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_i$$

b) Rotationsenergier:

$$K_i = \frac{1}{2} I_1 \omega_i^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega_f^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\frac{I_1^2}{(I_1+I_2)^2}\omega_i^2 =$$

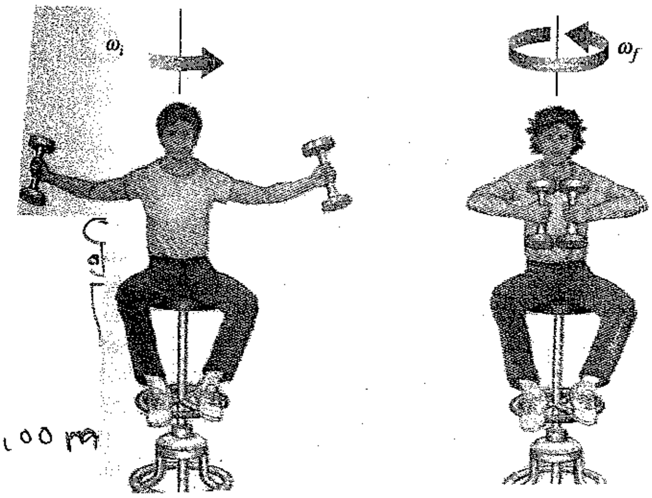
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{I_1}{I_1 + I_2}\right) I_1 \omega_i^2$$

men $\frac{I_1}{I_1 + I_2} < 1 \Rightarrow K_i > K_f$

10.48

11.30

A student sits on a freely rotating stool holding two weights, each of mass 3.00 kg (Figure P11.30). When his arms are extended horizontally, the weights are 1.00 m from the axis of rotation and he rotates with an angular speed of 0.750 rad/s. The moment of inertia of the student plus stool is 3.00 kg · m² and is assumed to be con-



Givet:

$m = 3{,}00$ kg $\quad r_1 = 1{,}00$ m

$\omega_i = 0{,}750$ rad/s

$I_0 = 3{,}00$ kgm² (student + stol)

$r_2 = 0{,}300$ m

Sökt: ω_f

Inga yttre vridande moment på systemet

$\Rightarrow L_i = L_f$

$$L_i = I_0 \omega_i + 2 m r_1^2 \cdot \omega_i$$

$$L_f = I_0 \omega_f + 2 m r_2^2 \cdot \omega_f$$

$$\therefore \omega_f = \frac{I_0 + 2mr_1^2}{I_0 + 2mr_2^2}\,\omega_i = \frac{3{,}00 + 2 \cdot 3{,}00 \cdot 1{,}00^2}{3{,}00 + 2 \cdot 3{,}00 \cdot 0{,}300^2}\,0{,}75 =$$

$$= \underline{1{,}91 \text{ rad/s}}$$

Rot. energier:

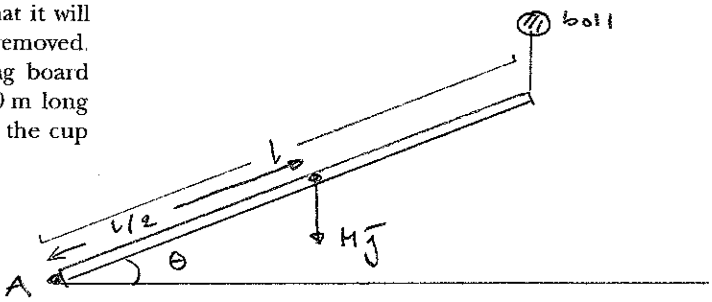
$$K_i = \frac{1}{2}(I_0 + 2mr_1^2) \cdot \omega_i^2 = 2{,}53 \text{ J}$$

$$K_f = \frac{1}{2}(I_0 + 2mr_2^2) \cdot \omega_f^2 = 6{,}44 \text{ J}$$

$\therefore$ $6{,}44 - 2{,}53 = 3{,}91$ J utförtas av muskelarbetet

A common demonstration, illustrated in Figure P10.72, consists of a ball resting at one end of a uniform board of length ℓ, hinged at the other end, and elevated at an angle θ. A light cup is attached to the board at r_c so that it will catch the ball when the support stick is suddenly removed. (a) Show that the ball will lag behind the falling board when θ is less than 35 3° (b) If the board is 1 00 m long and is supported at this limiting angle, show that the cup must be 18 4 cm from the moving end.

10.72



Hur stor får θ högst vara för att bollen ska falla långsammare än änden på plankan?

Vridande moment m.a.p. A : $\tau_A = Mg\frac{L}{2}\cdot\cos\theta$

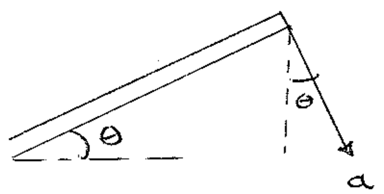
Plankans tröghetsmoment m.a.p. A : $I_A = \frac{1}{3}ML^2$

$$\tau_A = I_A\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow \cancel{M}g\frac{\cancel{L}}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}\cancel{M}L^{\cancel{2}}\cdot\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{3}{2}\,\frac{\cos\theta}{L}\,g$$

$$\Rightarrow\quad a = \frac{3}{2}\cos\theta\cdot g$$

men plankänden rör sig inte rakt mot marken

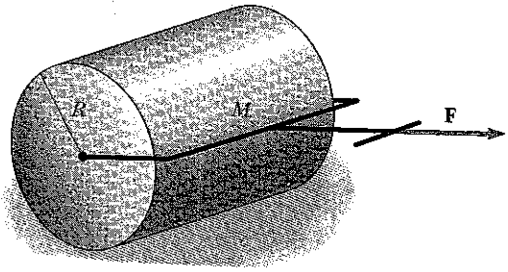


Det gäller att $a\cdot\cos\theta > g$ för att plankan ska hinna före bollen

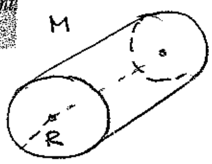
$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\cos\theta\cdot g\right)\cdot\cos\theta > g$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta > \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\theta < 35{,}26^\circ}}$$

A constant horizontal force **F** is applied to a lawn roller i the form of a uniform solid cylinder of radius R and mas M (Fig P10.78) If the roller rolls without slipping on th horizontal surface, show that (a) the acceleration of th center of mass is $2\mathbf{F}/3M$ and (b) the minimum coefficien of friction necessary to prevent slipping is $F/3Mg$. (*Hin* Take the torque with respect to the center of mass.)

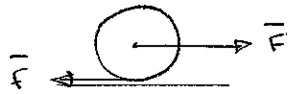


10.78



Homogen cylinder:

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$



a) Tyngdpunktens acceleration:

ges av summan av externa krafter dvs $\bar{F} + \bar{f}$

$$F - f = M \cdot a_{CM}$$

men friktionskraften f möjliggör rotations-rörelsen:

$$\left.\begin{array}{l} \tau = I \cdot \alpha \\ \tau = f \cdot R \\ \alpha = \dfrac{a_{CM}}{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f = \frac{\tau}{R} = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I a_{CM}}{R^2} = \frac{\frac{1}{2} M R^2 \cdot a_{CM}}{R^2} = \frac{1}{2} M a_{CM}$$

$$\therefore F - f = F - \frac{1}{2} M a_{CM} = M a_{CM} \Rightarrow F = \frac{3}{2} M a_{CM}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{2F}{3M}} \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{2F}{3MR}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} f_{max} = \mu_s M g \\ f_{max} R = I\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_s \cancel{M} g \cancel{R} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{M} R^2 \frac{\cancel{2}F}{3 M \cancel{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{F}{3Mg}}$$