

FYSIK FÖR INGEJÖRER För D2

Kursens innehåll: MEKANIK
VÄRMEÄRÄ
VÄRMEFÖRHÄLLANDEN
KVANTFYSIK.

Mekanik: Hörnstenar: ① Newtons lagar
② kinematik ("rörelselära")

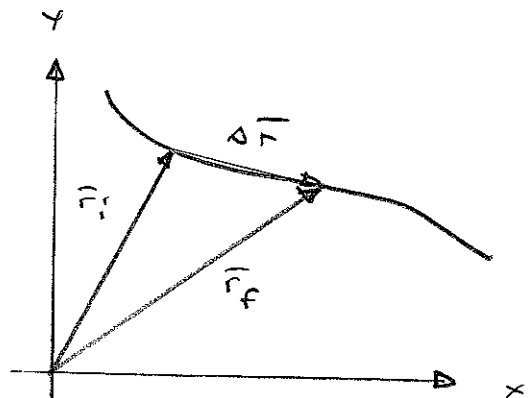
Förhållanden: vektorbegreppet + elementära vektorräkningar
differentialkalkyl: $dx = v \cdot dt$ $ds = r \cdot d\theta$...
endimensionell kinematik: $x = x_0 + v \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2$
 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$
fritt fall.

Endimensionell kinematik:

$$\Delta \vec{r} \equiv \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

medelhastighet

$$\vec{v}_{avg} \equiv \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



momentanhastighet

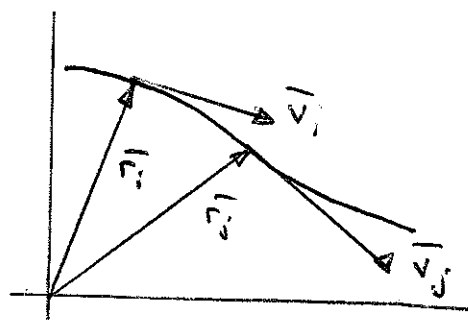
$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

medelacceleration:

$$\vec{a}_{avg} \equiv \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

momentanacceleration:

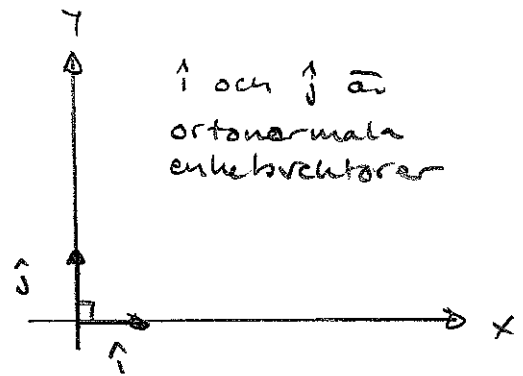
$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$



(2)

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$$

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = \\ &= v_x\hat{i} + v_y\hat{j}\end{aligned}$$



Om $\vec{a}$ är konstant dvs a_x och a_y är konstanta kan vi skriva:

$$v_x = v_{xf} = v_{xi} + a_x \cdot t$$

$$v_y = v_{yf} = v_{yi} + a_y \cdot t$$

$$\Rightarrow \vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a} \cdot t$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_f = \frac{d\vec{r}}{dt} &\Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}_f dt = (\vec{v}_i + \vec{a} \cdot t) \cdot dt = \\ &= \vec{v}_i \cdot dt + \vec{a} \cdot t \cdot dt\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_i^f d\vec{r} = \int_i^f \vec{v}_i \cdot dt + \int_i^f \vec{a} \cdot t \cdot dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}_f - \vec{r}_i = \vec{v}_i \cdot (t_f - t_i) + \frac{1}{2} \vec{a} (t_f - t_i)^2$$

eller med $t_f = t$ och $t_i = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2}$$

$d\vec{r}$ ligger i det plan som spänns upp av $\vec{v}_i$ och $\vec{a}$.

Kaströrelse

$$v_{xi} = v_i \cdot \cos \theta$$

$$a = -g$$

$$v_{yi} = v_i \cdot \sin \theta$$

$$v = v_0 + at$$

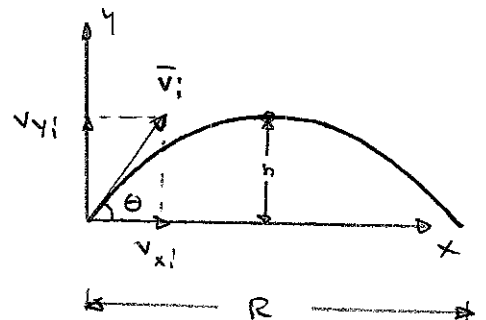
$$0 = v_i \cdot \sin \theta - (g t_A) \Rightarrow t_A = \frac{v_i \cdot \sin \theta}{g}$$

$$h = (v_i \cdot \sin \theta) \cdot t_A + \frac{1}{2} a \cdot t_A^2 =$$

$$= v_i \sin \theta \frac{v_i \sin \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_i \sin \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_i^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

$$R = (v_i \cdot \cos \theta) \cdot 2t_A = v_i \cos \theta \frac{2v_i \sin \theta}{g} = \frac{2v_i^2 \sin \theta \cdot \cos \theta}{g} = \frac{v_i^2 \sin 2\theta}{g}$$

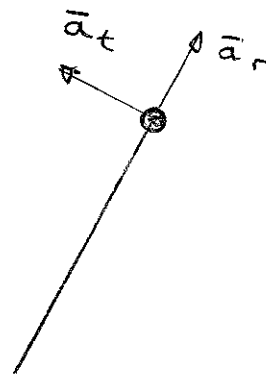
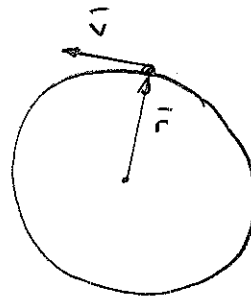
maximalt R om $\theta = 45^\circ$



Partikel i uniform cirkulär bana

oppråkligt att dela upp
accelerationen i x- och
y-komponenter.

Vi väljer i stället en uppdelning
i en komponent parallell med
 $\vec{r}$ och en komponent $\perp \vec{r}$
dvs i tangentens riktning, dvs
parallell med $\vec{v}$

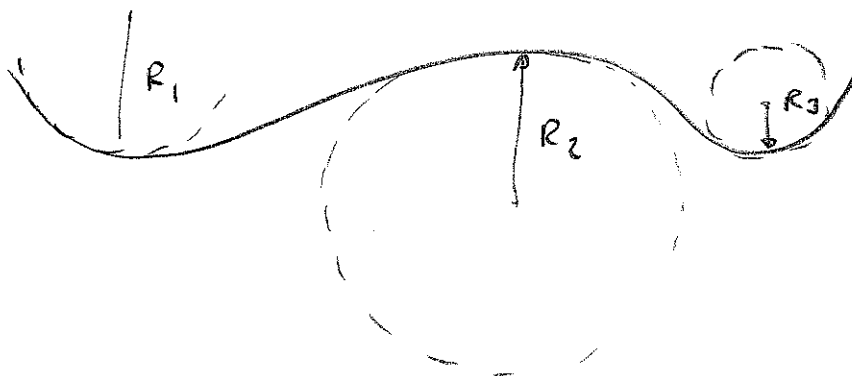


Man kan visa att

$$a_r = -\frac{v^2}{r}$$

och

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$



Om banan är mer komplicerad än en
cirkelbana använder man den lokala
krökningradien R_1 , R_2 , R_3 .

Newtons lagar

Vi har lärt oss beskriva rörelse i kinematiken.

Det som orsakar rörelsen beskrivs i dynamiken.

Fundament : Newtons 3 lagar

Macroscopiskt : Kontaktkrafter - Fältkrafter

Microscopiskt :
1) Gravitationskrafter
2) Elektromagnetiska krafter
3) Stark växelverkan (neutron-proton)
4) Svag växelverkan

Klassisk mekanikens spektrum : makroskopiska objekt (annars kvantmekanik)
hastigheter $\ll c$ (— special teori)
svaga gravitationsfält (— allmän relativitet)

Newton : 1642-1727 1665 Cambridge stänger pga pest. Där utvecklade han bl.a. differential och integralräkning. Sannolikt med ledande avseende - Gränsprocesser.

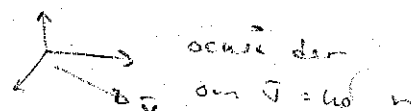
Newton: 1:a lag.

Tröghetslagen en fri partikel rör sig med konstant hastighet (utan acceleration)

Fri partikel : Ingen växelverkan av något slag med omgivningen

Vem bestämmer vad som är en fri partikel? Rörelsen mät i ett inertialsystem (tröghetsystem)

Om $\mathcal{S}$ är ett inertialsystem så är



rotation innebär acceleration.

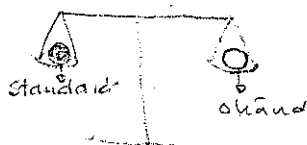
Jordens bana runt solen innebär acceleration. Dessutom snurrar den runt sin egen axel. Dock : $a_{\text{J, bana}} = 4.4 \cdot 10^{-7} \text{ m/s}^2$ (mot solen)

vid ekvator $a_{\text{J, rotation}} = 7.7 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$ mot jordens mittpunkt

$\therefore$ Jorden $\approx$ inertialsystem.

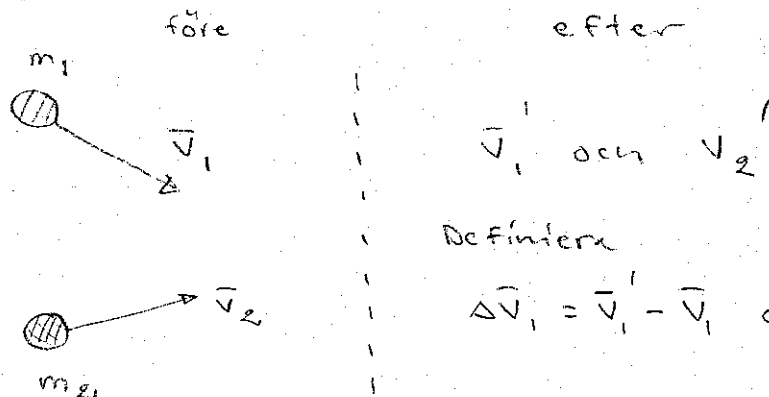
Massa : Tung massa - Trög massa

a) Tung massa



b) Trög massa

Betrakta två kollar som kolliderar elastiskt (som i biljard) med varandra



Definiera

$$\Delta \vec{v}_1 = \vec{v}_1' - \vec{v}_1 \quad \text{och} \quad \Delta \vec{v}_2 = \vec{v}_2' - \vec{v}_2$$

Mät $\Delta \vec{v}_1$ och $\Delta \vec{v}_2$! Experimentellt $\frac{|\Delta \vec{v}_1|}{|\Delta \vec{v}_2|} = \text{konstant} = \frac{m_2}{m_1}$

Låt den ena massan ex. m_1 vara standardmassan 1kg
Bestäm m_2 mha $|\Delta \vec{v}_1| / |\Delta \vec{v}_2|$

Alternativ metod: $F = ma$ (exp. formen lag)

- 1) Låt en viss kraft F verka på en kropp med massan m_1 (standardmassa ex. 1kg)
- 2) Mät den acceleration som F ger upphov till: a_1
- 3) Låt samma kraft F verka på en okänd massa m_2
- 4) Mät a_2 och bestäm m_2 mha

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Massa är en universell storhet: $M = 70 \text{ kg}$ gäller såväl på jorden som på månen.

Vikten är olika eftersom tyngdaccelerationen är olika.

Vi har nu redan utnyttjat Newtons 2:a lag, som säger att accelerationen för en kropp är direkt proportionell mot nettokraften som verkar på den och omvänt proportionell mot dess massa.

eller

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z}$$

Med $\vec{p} = m\vec{v}$ = rörelsemängden kan vi skriva Newtons 2:a lag

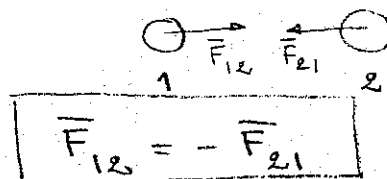
$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \sum F_x = \frac{dp_x}{dt}, \quad \sum F_y = \frac{dp_y}{dt}, \quad \sum F_z = \frac{dp_z}{dt}}$$

och få med de fall där massan ändras i tiden. (Rocket)

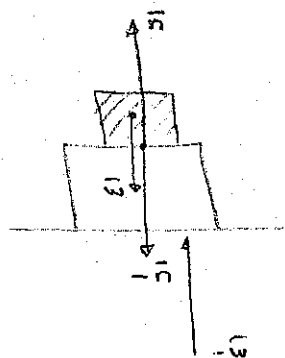
Enhet för kraft $1 \text{ kgm/s}^2 = 1 \text{ N}$ (Newton)

Newton 3:e lag.

När två kroppar växelverkar med varandra, är kraften på 1 från 2 lika stor och motsatt riktad som kraften på 2 från 1



ex



isolerad



Hästen - karran

Tillämpningar

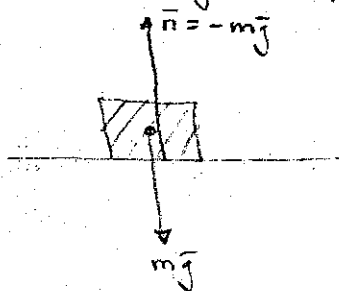
- Alltid vid problemlösning:
- rita tydlig figur
 - frilägg kropparna (nya figurer ev.)
 - red ut och rita in vilka krafter som verkar på var och en av kropparna (inkludera yttre krafter ex tyngdkraft och aktionskrafter och reaktionskrafter ex normalkrafter, snörkrafter)

två fall

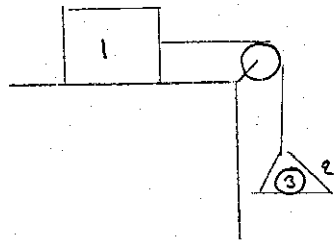
- 1) Jämvikt: systemet rör sig inte alls, dvs det är i jämvikt
Dette behandlas i statiken

vid jämvikt: $\sum \vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = 0$

ex



Exempel



Givet

$$M_1 = 2,0 \text{ kg}$$

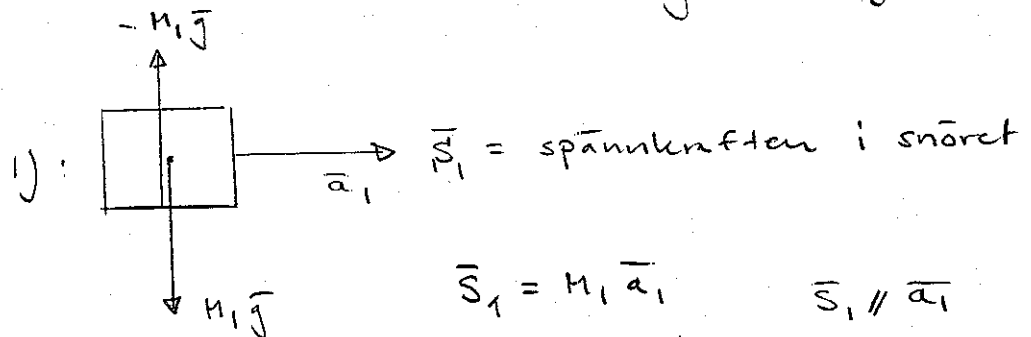
$$M_2 = 3,0 \text{ kg}$$

$$M_3 = 1,0 \text{ kg}$$

ingen friktion
snöret otänjbart
masslös trissa utan
friktion
vågen masslös.

Sökt : accelerationen och
vågens utslag.

lösning
Frläggning

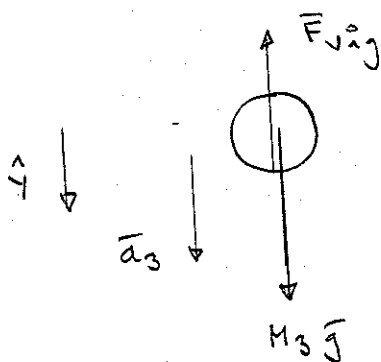


$$\vec{S}_1 = M_1 \vec{a}_1 \quad \vec{S}_1 \parallel \vec{a}_1$$

$$S_1 = M_1 a_1$$

2) vänta lite

3)



$$M_3 \vec{g} + \vec{F}_{våg} = M_3 \vec{a}_3$$

$$M_3 g \hat{y} + F_{våg} (-\hat{y}) = M_3 a_3 \hat{y}$$

$$\Rightarrow M_3 g - F_{våg} = M_3 a_3$$

Nu 2:

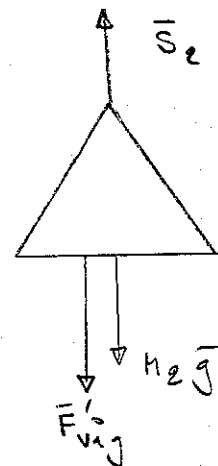
$$\vec{F}'_{våg} = F_{våg} \hat{y}$$

$$\vec{S}_2 = S_2 (-\hat{y}) = S_1 (-\hat{y})$$

$$M_2 \vec{g} + \vec{F}'_{våg} + \vec{S}_2 = M_2 \vec{a}_2$$

$$\Rightarrow M_2 g + F_{våg} - S_1 = M_2 a_2$$

friktnslost
yta på
trissan



otänjbart snöre $\Rightarrow |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = a$

Vi har tre ekvationer och tre obekanta. Lösbart.

$$\begin{cases} S_1 = M_1 a & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 g + F_{V_{12}} - S_1 = M_2 a & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_3 g - F_{V_{12}} = M_3 a & (3) \end{cases}$$

$S_1 = M_1 a$ och (2) + (3) ger

$$(M_2 + M_3) g - M_1 a = (M_2 + M_3) a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g} = \frac{3+1}{6} g = \frac{2}{3} g$$

Detta hade vi kunnat
sätta upp direkt.

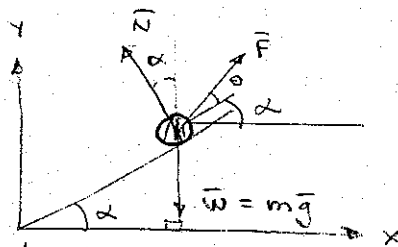
sätt in i (3)

$$\Rightarrow M_3 g - F_{V_{12}} = M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{V_{12}} &= M_3 g - M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g = \frac{M_1 \cdot M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g = \\ &= \frac{1 \cdot 2}{6} g = \frac{1}{3} g \end{aligned}$$

dvs om vågen är
graderad på vanligt sätt
så visar den $1/3$ kg.
Massan 3 är 1 kg.

ex. Partikel i jämvikt
iv) på ett lutande
plan.



$\bar{N}$ = normalkraft $\perp$ planet

$\bar{W}$ = tyngdkraften

$\bar{F}$ = dragkraft + friktion

Jämvikt: $\bar{N} + \bar{F} + \bar{W} = 0 = \sum \bar{F}_i$

balans i såväl x- som y-led

x-led: $F \cdot \cos(\alpha + \theta) - N \cdot \sin \alpha = 0$ (1)

y-led: $F \cdot \sin(\alpha + \theta) + N \cos \alpha - mg = 0$ (2)

Multipl. (1) med $\cos \alpha$ och (2) med $\sin \alpha$ och addera (1) och (2)

$$\Rightarrow F \left[\underbrace{\cos \alpha \cdot \cos(\alpha + \theta) + \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \theta)}_{\cos[\alpha - (\alpha + \theta)]} \right] - mg \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\cos[\alpha - (\alpha + \theta)] = \cos \theta$$

$$F \cdot \cos \theta - mg \cdot \sin \alpha \Rightarrow \boxed{F = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{\cos \theta}}$$

rimligt ty om $\alpha = 0$ så behövs inget F!
ökar θ så behövs större F

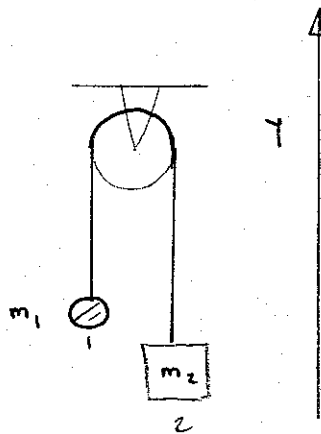
Ursprungsekvation (1) ger $F \cos(\alpha + \theta) = N \cdot \sin \alpha$

insättning av $F = \frac{mg \cdot \sin \alpha}{\cos \theta}$ ger

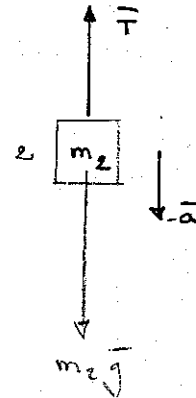
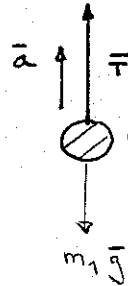
$$\boxed{N = \frac{mg \cdot \cos(\alpha + \theta)}{\cos \theta}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ii Artwoods maskin



Figuren ritad i
fallet $m_2 > m_1$
ger $\vec{a}$ i rikt.



$$(1) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_1 = m_1 a$$

$$(2) \quad \sum F_y = T - m_2 g = -m_2 a_2 = -m_2 a$$

2 obekanta T och a
2 ekvationer

$$(1) - (2)$$

$$\Rightarrow -m_1 g + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

Insättning av detta ger

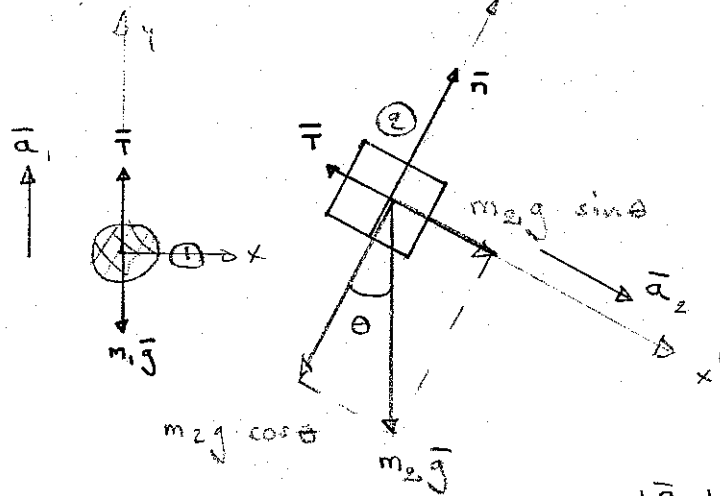
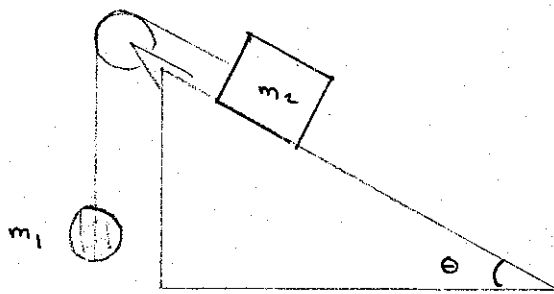
$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow a = 0 \quad \text{samt} \quad T = m_1 g$$

rimligt!

$$(1) \quad m_1 \ddot{\hat{y}}_1 = \hat{T}_1 - g m_1$$

$$(2) \quad m_2 \ddot{\hat{y}}_2 = \hat{T}_2 - g m_2$$



$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$$

①

$$(1) \quad \sum F_x = 0$$

$$(2) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a$$

① uppåt om $T > m_1 g$

②

$$(3) \quad \sum F_{x'} = m_2 g \sin \theta - T = m_2 a$$

$$(4) \quad \sum F_{y'} = n - m_2 g \cos \theta = 0$$

elv. (2) och (3) (2 st) innehåller 2 obekanta: T och a

(2) ger $T = m_1 a + m_1 g$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g \sin \theta - m_1 g}{m_1 + m_2}$$

och vidare

$$T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \theta)}{m_1 + m_2}$$

sätt in $\theta = 45^\circ$ och $m_1 = 10,0 \text{ kg}$ och $m_2 = 5,0 \text{ kg}$

$$\Rightarrow a = -4,22 \text{ m/s}^2$$

dvs ① rör sig nedåt

och ② uppåt (snellt)