Föreläsningsanteckningar

i

Mekanik

För D1 och K1

Vt 2004

Åke Fäldt

Välkommen till
MEKANIK vt 2004

Varför mekanikkurs?

Jo:
a) kunna kommunicera med andra tekniker
b) Naturvetenskaplig allmänbildning
c) Träning i problemlösning; matematiska modeller.

Den här kursen: mekanik för partiklar
mekanik för stela kroppar (system av partiklar)

Viktiga begrepp: KRAFT ARBETE–ENERGI
RÖRELSEMÄNGD RÖRELSEMÄNGDSMOMENT

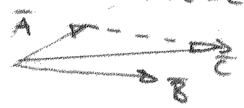
Traditionellt upplägg: först kinematik (beskrivning av rörelse) sedan studier av hur krafter ger upphov till rörelse. Koppling med hjälp av Newtons lagar.

Nu: Börja med Newtons lagar och skapa behov av kinematiken.

Vad behövs som förkunskaper?

a) vektorbegreppet + elementära räkneregler

$\bar{A}+\bar{B}=\bar{C}$



b) differentialkalkyl

$ds = r \cdot d\theta$

Det är lätt att förledas att hoppa över steg och lita på intuition men använd inte för mycket huvudräkning. Accelererade rörelser är något som man i regel inte har någon intuitiv korrekt uppfattning om.

Krafter och Newtons lagar.

$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$: en variant av Newtons 2:a lag.

+

jordens acceleration är nästan försumbar. $a \approx 0$

$\Downarrow$

$\Rightarrow F_{netto} \approx 0$

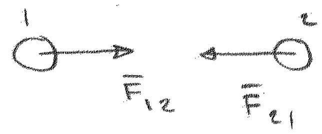
Newtons lagar:

1) en fri partikel rör sig med konstant hastighet

jätte-viktigt!

2) $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$ $\quad \bar{p} = m\bar{v}$ $\quad m$ = massan, $\bar{v}$ = hastigheten

3) När två kroppar växelverkar med varandra är kraften på 1 från 2 lika stor som och motriktad kraften på 2 från 1.

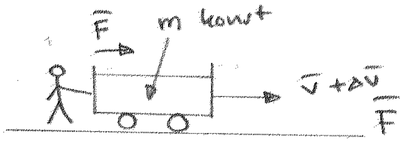


$\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$

Newtons 2:a lag: $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = m\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dm}{dt}$

När behövs en kraft?

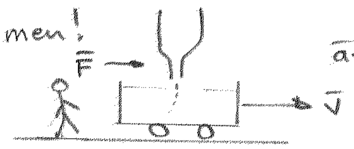
i)



öka hastigheten

$\bar{F} = m \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a}$

ii)

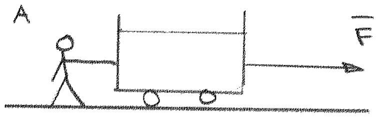


även om $\bar{v}$ = konstant så behövs en kraft för att vidmakthålla detta om massan ökar (el. minskar)

$\bar{F} = \bar{v} \cdot \frac{dm}{dt}$

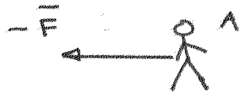
Den vanligaste situationen är dock att m är konstant vilket innebär

$\bar{F} = m\bar{a}$



A utövar kraften $\bar F$ på vagnen.

$\Rightarrow$ Vagnen utövar kraften $-\bar F$ på A



men A accelereras inte $\because$ fler krafter än $-\bar F$ verkar på A.

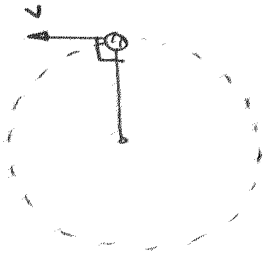
A står på golvet och friktionen mot detta

osv.

$\underline{\bar F = m\bar a}$: vektorekvation

fart $v = |\bar v|$

Släggkastare som roterar med konstant fart (obs! ej konst $\bar v$)



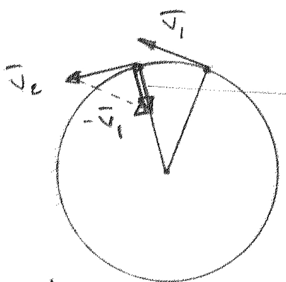
$$\bar F = m\frac{d\bar v}{dt}$$

inte

$$\cancel{F = m\frac{dv}{dt}}$$

$$\bar a = \frac{d\bar v}{dt} \;;\qquad \frac{d\bar v}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar v}{\Delta t} = \frac{\bar v_2 - \bar v_1}{\Delta t}$$

då $\bar v_2 \to \bar v_1$



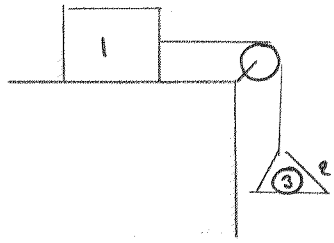
$\bar v_2 - \bar v_1$: riktad in mot centrum

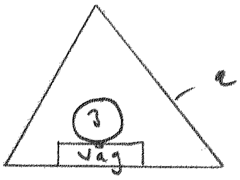
Figuren ljuger lite eftersom om vi verkligen ritar fallet $\bar v_2 \to \bar v_1$ så går det inte att se något.

$\therefore$ $\bar a$ riktad in mot centrum av cirkeln

Om farten v inte är konstant pekar <u>inte</u> $\bar a$ rakt in mot centrum. Mer om detta senare.

Exempel:





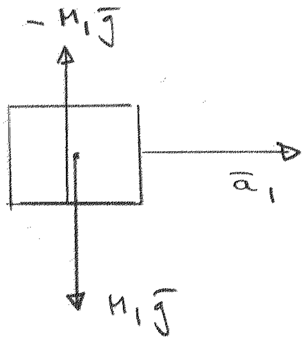
Givet: $M_1 = 2{,}0$ kg
$M_2 = 3{,}0$ kg
$M_3 = 1{,}0$ kg

ingen friktion
snöret otänjbart
masslös trissa utan friktion
vågen masslös.

Sökt: accelerationen och vågens utslag.

Lösning:

Friläggning 1):



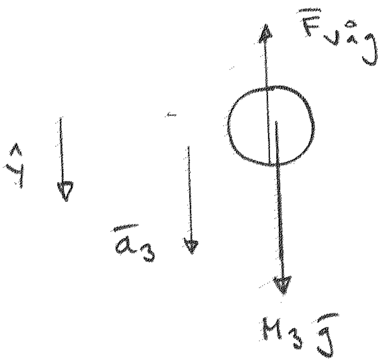
$\bar{S}_1$ = spännkraften i snöret

$\bar{S}_1 = M_1 \bar{a}_1$ $\qquad \bar{S}_1 \parallel \bar{a}_1$

$\boxed{S_1 = M_1 a_1}$

2) Vänta lite

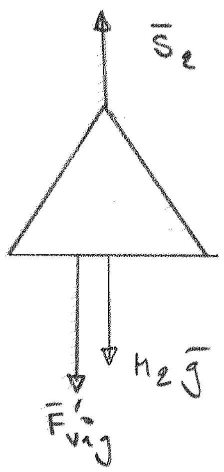
3)



$$M_3 \bar{g} + \bar{F}_{våg} = M_3 \bar{a}_3$$

$$M_3 g \hat{y} + F_{våg}(-\hat{y}) = M_3 a_3 \hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_3 g - F_{våg} = M_3 a_3}$$



Nu 2: $\bar{F}'_{våg} = F_{våg}\hat{y}$

friktionslös yta på trissan

$\bar{S}_2 = S_2(-\hat{y}) = S_1(-\hat{y})$

$$M_2 \bar{g} + \bar{F}'_{våg} + \bar{S}_2 = M_2 \bar{a}_2$$

$$\Rightarrow \boxed{M_2 g + F_{våg} - S_1 = M_2 a_2}$$

otänjbart snöre $\Rightarrow |\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = a$

Vi har tre ekvationer och tre obekanta. Lösbart.

$$\begin{cases} S_1 = M_1 a & (1) \\ M_2 g + F_{våg} - S_1 = M_2 a & (2) \\ M_3 g - F_{våg} = M_3 a & (3) \end{cases}$$

$S_1 = M_1 a$ och (2) + (3) ger

$$(M_2 + M_3) g - M_1 a = (M_2 + M_3) a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g} = \frac{3+1}{6} g = \frac{2}{3} g$$

Detta hade vi kunnat sätta upp direkt.

Sätt in i (3)

$$\Rightarrow M_3 g - F_{våg} = M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g$$

$$\Rightarrow F_{våg} = M_3 g - M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g = \frac{M_1 \cdot M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g =$$

$$= \frac{1 \cdot 2}{6} g = \frac{1}{3} g$$

dvs om vågen är graderad på vanligt sätt så visar den 1/3 kg. Massan 3 är 1 kg.

Kinematik

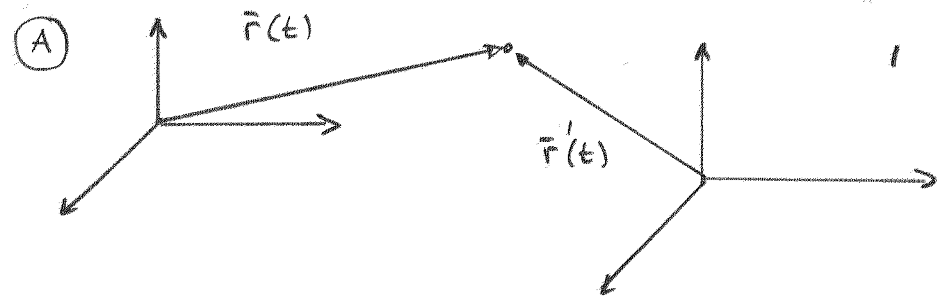
Till att börja med : rörelse hos partikel (objekt utan utsträckning)

Viktiga begrepp :

	1 dimension	3 dimensioner
läge :	$x(t)$,	$\bar{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$
hastighet :	$v(t)$,	$\bar{v}(t) = \{v_x(t), v_y(t), v_z(t)\}$
acceleration :	$a(t)$,	$\bar{a}(t) = \{a_x(t), a_y(t), a_z(t)\}$

Samband mellan läge och hastighet :

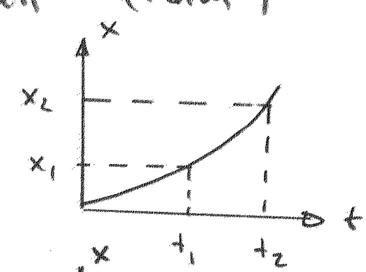
Partikelns läge beskrivs av en lägesvektor (el. ortsvektor) i något koordinatsystem som vi valt.



Vi kan välja origo godtyckligt. Lämplig placering ges av problemets natur. Vi kunde också ha valt att beskriva läget med hjälp av ett koordinatsystem som rör sig med konstant hastighet relativt koordinatsystem A

Medelhastigheten i ett ändligt intervall (1 dim)

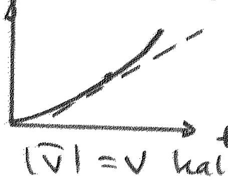
$$v_{ave} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$



Gör Δt mindre och mindre!

Hastigheten v vid tiden t fås av

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad \text{el. } \dot{x}(t)$$

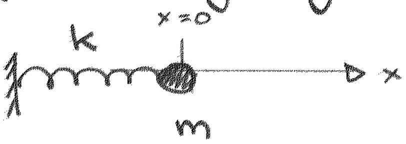


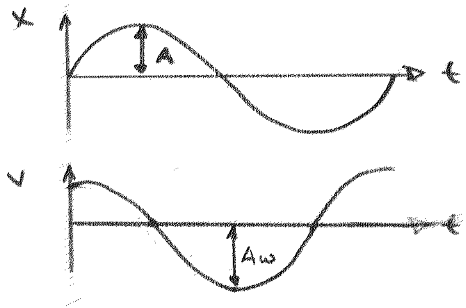
v är lika med lutningen

beloppet av hastighetsvektorn $|\bar{v}| = v$ kallas fart

Några exempel:

i) Fjädersvängning





$x = A \cdot \sin \omega t$

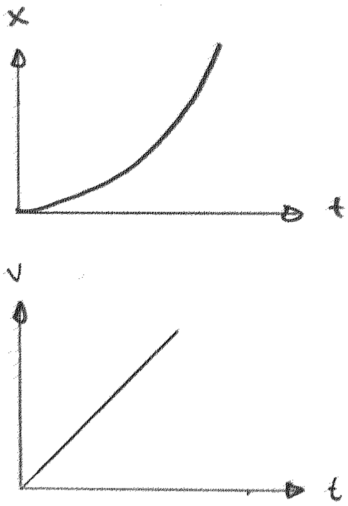
$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos \omega t$

ii)

$x(t) = \frac{1}{2} t^2$

$\Rightarrow v(t) = \dot{x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} t^2\right) =$

$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t = t$



dvs efter 1 s är hastigheten 1 m/s. osv.

Vi kan naturligtvis också gå från kunskap om $v(t)$ till kunskap om $x(t)$: $v \rightarrow x$

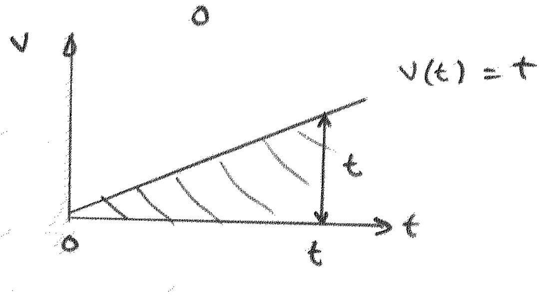
$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$$

$$\rightarrow \int_{t_0}^{t} dx = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt \Rightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt$$

ex. $v(t) = t$

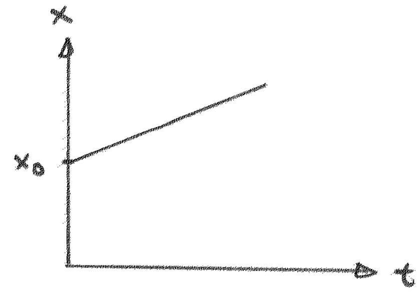
$$\Rightarrow x(t) - x(t_0) = [\text{sätt } t_0 = 0] = \int_0^t t \cdot dt =$$

$= \frac{1}{2} t^2$ = arean under kurvan $v(t)$



Exempel

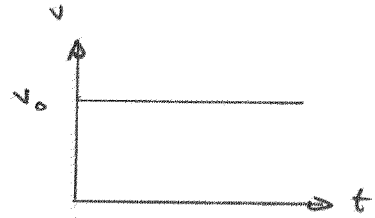
i) <u>Likformig rörelse</u> : $a = 0$ dvs $\ddot{x} = 0$



$\therefore$ v = konstant $= v_0$

$$x(t) - x(0) = \int_0^t v_0 \cdot dt = v_0 \int_0^t dt =$$

$$= v_0 t$$



$$\therefore \quad \boxed{x(t) = x_0 + v_0 t}$$

ii) <u>konstant acceleration</u> : $a = a_0$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

på samma sätt som för sambandet mellan v och x :

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} a_0 \cdot dt \Rightarrow v = a_0(t - t_0) + v_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \left[\int_{t_0}^{t} (a_0 t - \underbrace{a_0 t_0}_{\text{konstant}} + v_0)\, dt \right] + x_0 =$$

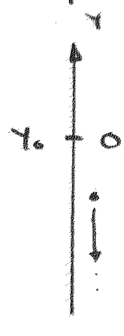
$$= \boxed{\frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2 + v_0 (t - t_0) + x_0 = x(t)}$$

Vanlig tillämpning : rörelse i tyngdkraftfältet $a_0 = g = 9{,}81\ m/s^2$
Beskriv läget med variabeln y! Två ekvivalenta varianter :

---

y-axeln pekar uppåt !
g riktad nedåt : $g = -9{,}81\ m/s^2$

$$y = y_0 + v_0(t - t_0) +$$
$$+ \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$



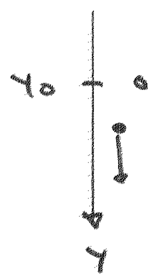
med $y_0 = 0$, $v_0 = 0$
och $t_0 = 0$

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

g negativ $\Rightarrow y < 0$

y-axeln pekar neråt !

$\Rightarrow g = +9{,}81\ m/s^2$



pss

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

g positiv
$\Rightarrow y > 0$

$\bar{r}$, $\bar{v}$ och $\bar{a}$ är vektorer dvs de bestäms av såväl riktning som belopp.

Exempel på addition av hastigheter:

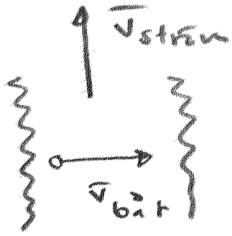
1 dim:

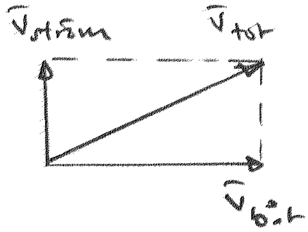
$\bar{v}_{båt}$ = båtens hastighet relativt vattnet

$\bar{v}_{ström}$ = vattnets hastighet relativt land

$\bar{v}_{tot}$ = båtens hastighet relativt land = $\bar{v}_{båt} + \bar{v}_{ström}$

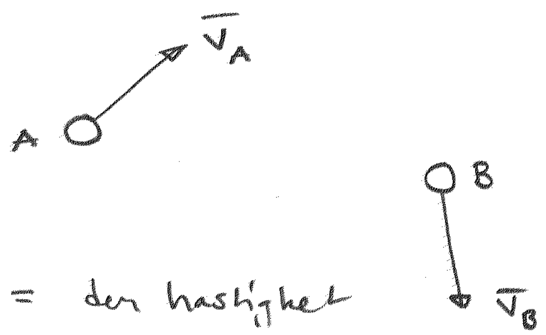
2 dim



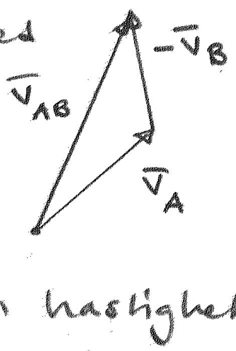


$$\bar{v}_{tot} = \bar{v}_{båt} + \bar{v}_{ström}$$

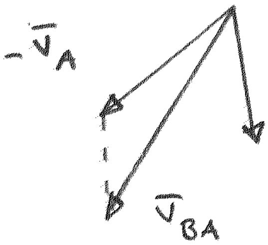
Relativ rörelse



$\bar{v}_{AB} = \bar{v}_A - \bar{v}_B$ = den hastighet
= den hastighet som <u>B</u> ser
A röra sig med

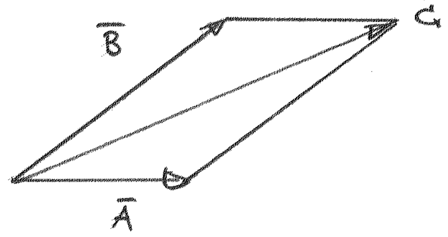


$\bar{v}_{BA} = \bar{v}_B - \bar{v}_A$ = den hastighet som <u>A</u> ser B
röra sig med



$$\bar{v}_{AB} = -\bar{v}_{BA}$$

Räkneregler för vektorer



$\bar{A} + \bar{B} = \bar{B} + \bar{A}$ (kommutativa lagen)

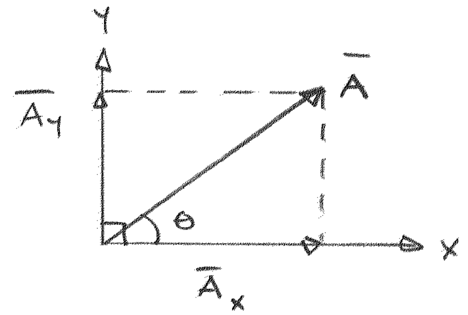
på samma sätt:

$\bar{A} + (\bar{B} + \bar{C}) = (\bar{A} + \bar{B}) + \bar{C}$

(distributiva lagen)

Komponentuppdelning:

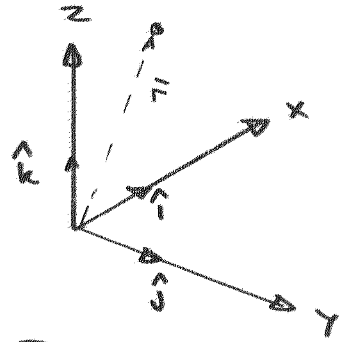
$$\begin{cases} A_x = A \cdot \cos\theta \\ A_y = A \cdot \sin\theta \end{cases}$$



$\bar{A} = \bar{A}_x + \bar{A}_y$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad \tan\theta = \frac{A_y}{A_x}$$

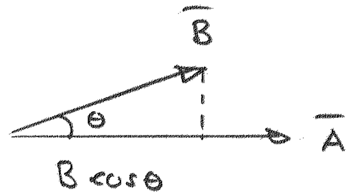
Enhetsvektorer: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$



$|\hat{i}| = |\hat{j}| = |\hat{k}|$

$\bar{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Skalärprodukt:



$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cdot \cos\theta$

$\bar{A} \cdot \bar{B} = \bar{B} \cdot \bar{A}$

$$\bar{A} \cdot (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot \bar{C}$$

med

$$\bar{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\bar{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

och $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} + \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k} = 0$

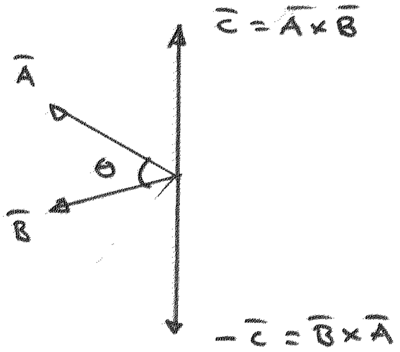
får vi

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = AB \cdot \cos\theta = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

Vektor- eller kryssprodukt

$$\bar{C} \equiv \bar{A} \times \bar{B} \quad , \quad |\bar{C}| = |\bar{A}| \cdot |\bar{B}| \cdot \sin\theta$$



i) $\bar{A} \times \bar{B} = -\bar{B} \times \bar{A}$

ii) $\bar{A} \times \bar{A} = 0$

iii) $\bar{A} \perp \bar{B} = |\bar{A} \times \bar{B}| = AB$

iv) $\bar{A} \times (\bar{B} + \bar{C}) = \bar{A} \times \bar{B} + \bar{A} \times \bar{C}$

v) $\frac{d}{dt}(\bar{A} \times \bar{B}) = \bar{A} \times \frac{d\bar{B}}{dt} + \frac{d\bar{A}}{dt} \times \bar{B}$

vi) $\bar{A} \times \bar{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \times (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$

$$= (A_y B_z - A_z B_y)\hat{i} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{j} +$$
$$+ (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$$

ty: $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad , \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k} \quad , \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i} \quad , \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

1 dim.

Rep. läge: $x(t)$ hastighet $v(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

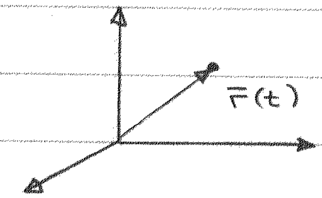
$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v \cdot dt \quad , \quad \text{acceleration: } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

fallrörelse: $\ddot{y} = g$, $\dot{y} = v_0 + gt$, $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

3 dim rörelse

Vektorkaraktären hos läge, hastighet och acceleration mer framträdande

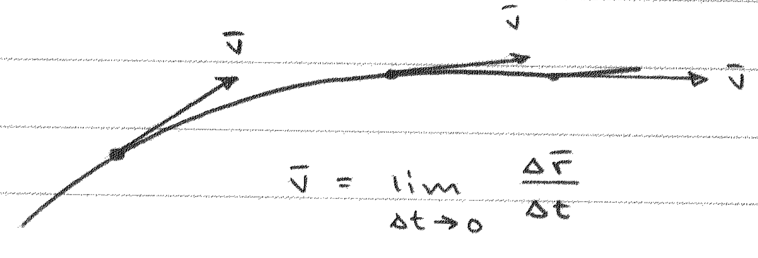
Läge:



$\bar{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

där $\hat{i}$ $\hat{j}$ och $\hat{k}$ är enhetsvektorer.

Hastigheten $\bar{v}(t)$:
(velocity)



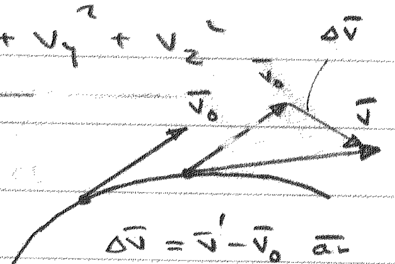
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

eller

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) =$$

$$= (v_x, v_y, v_z)$$

$|\bar{v}|$ kallas farten (speed) $|\bar{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$



på samma sätt: $\bar{a} = \lim \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v} - \bar{v}_0}{t - t_0}$

eller $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$

$\Delta\bar{v} = \bar{v}' - \bar{v}_0$ är riktad "inåt" dvs mot den konkava sidan av kurvan.

Vi ska visa nedan att om accelerationen är konstant så kommer rörelsen att ske i ett plan (dvs ingen spiralrörelse exempelvis)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \text{konstant} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \bar{a} \cdot dt = \int_{t_0}^{t} \frac{d\bar{v}}{dt} \cdot dt = \bar{v}(t) - \bar{v}(t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t} \bar{a} \cdot dt = \bar{a}(t_0 - t)$$

$$\therefore \quad \bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{a}(t - t_0)$$

bestäm $\bar{r}(t)$!

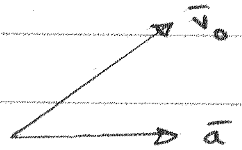
$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot dt = \boxed{\bar{r} - \bar{r}_0} = \int_{t_0} \bar{v} \cdot dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[\bar{v}_0 + \bar{a}(t - t_0)\right] dt = \boxed{\bar{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\bar{a}(t - t_0)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{r} - \bar{r}_0 = \bar{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\bar{a}(t - t_0)^2}$$

förflyttningen

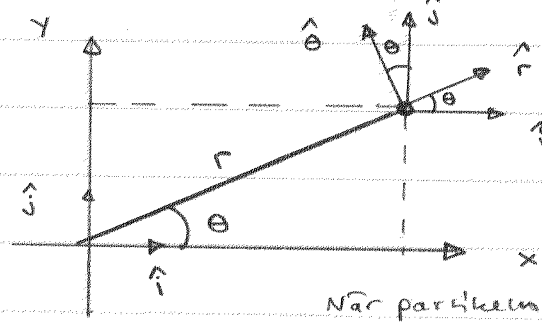
$\therefore$ $(\bar{r} - \bar{r}_0)$ ligger i det plan som spänns upp av vektorerna $\bar{v}_0$ och $\bar{a}$ som båda är konstanta



$\therefore$ Tvådimensionella beskrivningar av en rörelse är ofta tillräckliga

Hastighet och acceleration i polära koordinater.

$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$



$\hat r$ och $\hat\theta$ är enhetsvektorer

$|\hat r| = |\hat\theta| = 1$

När partikeln rör sig ändras $\hat r$ o $\hat\theta$ medan $\hat i$ och $\hat j$ ligger fast.

$$\bar v = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{d}{dt}(r\cdot\hat r) = \underline{\underline{\dot r\,\hat r + r\frac{d}{dt}(\hat r)}}$$

För att komma vidare måste vi utreda vad $\frac{d\hat r}{dt}$ och (visar det sig) $\frac{d\hat\theta}{dt}$ kan utvecklas!.

$$\hat r = |\hat r|\cdot\cos\theta\cdot\hat i + |\hat r|\cdot\sin\theta\cdot\hat j = \hat i\cdot\cos\theta + \hat j\cdot\sin\theta$$

$$\hat\theta = |\hat\theta|\cdot\sin\theta(-\hat i) + |\hat\theta|\cdot\cos\theta\cdot\hat j = -\hat i\cdot\sin\theta + \hat j\cdot\cos\theta$$

Nu kan vi derivera dessa uttryck!

$$\frac{d\hat r}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat i\cdot\cos\theta + \hat j\cdot\sin\theta) = -\hat i\cdot\dot\theta\cdot\sin\theta + \hat j\,\dot\theta\cos\theta =$$

$$= \dot\theta(-\hat i\sin\theta + \hat j\cdot\cos\theta) = \dot\theta\,\hat\theta = \dot{\hat r}$$

$$\therefore \boxed{\bar v = \dot r\,\hat r + r\,\dot{\hat r} = \dot r\,\hat r + r\dot\theta\,\hat\theta} = v_r\,\hat r + v_\theta\,\hat\theta$$

Accelerationen: $\bar a = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot r\,\hat r + r\dot\theta\,\hat\theta\right)$

För detta behöver vi $\frac{d}{dt}(\hat\theta)$.

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\hat{i}\cdot\sin\theta + \hat{j}\cos\theta\right) = -\hat{i}\cdot\dot{\theta}\cos\theta - \hat{j}\cdot\dot{\theta}\cdot\sin\theta =$$

$$= \dot{\theta}\left(-\hat{i}\cdot\cos\theta - \hat{j}\cdot\sin\theta\right) = -\dot{\theta}\,\hat{r}$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}\right) =$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}} =$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\hat{r}\right) =$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

dvs

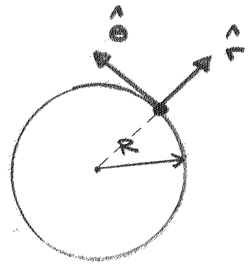
$$\bar{a} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta}$$

där

$$\boxed{\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}}$$

Viktigt specialfall: Cirkulär rörelse. $r = \text{konstant} = R$

Hastigheter

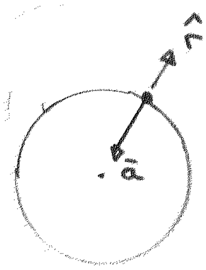


$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta} = R\dot{\theta} = R\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

Acceleration:

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - R\dot{\theta}^2 = \left(-R\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \dfrac{1}{R} = -\dfrac{v_\theta^2}{R} \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = R\ddot{\theta} = \dfrac{dv_\theta}{dt} \end{cases}$$

Om vi har en konstant värde på $v_\theta = v$



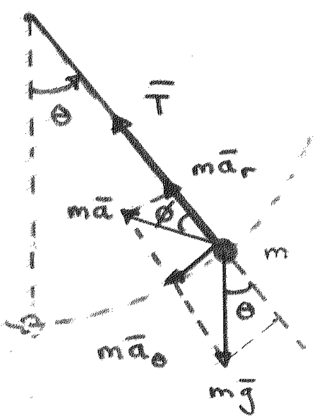
$$\bar{a} = a_r \hat{r} = -\frac{v^2}{R}\hat{r}$$

accelerationen är riktad mot cirkelns centrum.

Exempel $r = R$, v_θ ej konstant

Kula fäst i snöre som pendlar

$\bar{T}$ = spännkraften i snöret



- Tyngdkraften $\bar{F}_g = m\bar{g}$ verkar på kulan
- För att hålla kulan i en bana som är skild från fritt fall (här cirkulär) krävs en spännkraft $\bar{T} = m\bar{a}_r$
- $\Sigma(\bar{F}_g + \bar{T}) \neq 0$ ty kulan accelereras
- $\bar{F}_g$ = konstant medan $\bar{T}$ varierar till såväl riktning som belopp.

Givet: vid $\theta = 20^\circ$ gäller $v = 1{,}50$ m/s. Sökt: $\bar{a}$
$R = 0{,}50$ m

Lösn.
$$\begin{cases} a_r = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{1{,}50^2}{0{,}5}\,\text{m/s}^2 = 4{,}5\ \text{m/s}^2 \\ a_\theta = g\cdot\sin\theta = 9{,}81\cdot\sin 20^\circ = 3{,}4\ \text{m/s}^2 \end{cases}$$

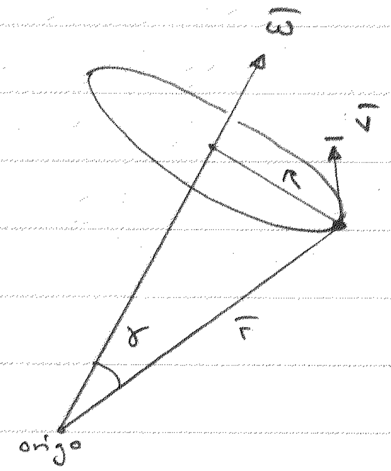
$$\begin{cases} \bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_\theta \\ \bar{a}_r \perp \bar{a}_\theta \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = 5{,}6\ \text{m/s}^2$$

$$\tan\phi = \frac{a_\theta}{a_r} \Rightarrow \phi = 36^\circ$$

Hur varierar $\bar{T}$ med θ?

Vinkelhastighet: $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \omega$ rad/s s^{-1}

Cirkulär
Rörelse i 3 dimensioner:



$R = r \cdot \sin\gamma$

$V = R\dot{\theta} = \omega R$

1) $\bar{\omega} \times \bar{r}$ är riktad längs $\bar{v}$

$$|\bar{\omega} \times \bar{r}| = |\bar{\omega}| \cdot |\bar{r}| \cdot \sin\gamma = \frac{V}{R} \frac{R}{\sin\gamma} \cdot \sin\gamma = V$$

2) $\therefore \; |\bar{\omega} \times \bar{r}| = V.$

1) + 2) ger $\boxed{\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}}$ cirkulär rörelse $\bar{\omega}$ konstant

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{v}$$

$\therefore \; \boxed{\bar{a} = \bar{\omega} \times \bar{v}}$ $\bar{a}$ är riktad mot cirkelns centrum

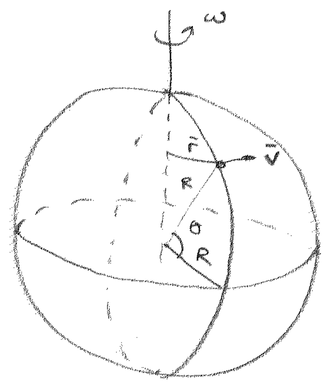
$$\Rightarrow \quad \bar{a} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Vad var det för bra med detta.

Jo:

uttrycken för $\bar{v}$ och $\bar{a}$ är oberoende av valet av koordinatsystem

Ex Jordens rotation



$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}\ s^{-1} =$$

$$= 7{,}29 \cdot 10^{-5}\ s^{-1}$$

$R = 6{,}35 \cdot 10^{6}\ m$

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} \Rightarrow |\bar{v}| = v = \omega R \cdot \sin(\pi/2 - \theta) =$$

$$= \underline{\omega R \cdot \cos\theta}$$

θ latituden

accelerationen: $|\bar{a}| = |\bar{\omega} \times \bar{v}| = \omega^2 R \cdot \cos\theta$

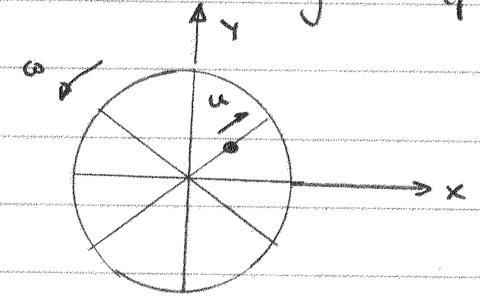
riktad $\perp \bar{v}$ dvs in mot rot. axeln.

vid ekvatorn $\theta = 0$ $\quad \bar{a} \parallel \bar{g}$; $\cos\theta = 1$

$v = 459\ m/s$

$a = 0{,}0337\ m/s^2$ jfr. $g = 9{,}81\ m/s^2$

Polära koordinater: Motiveringsexempel



En liten kula rör sig med konstant fart u längs en eker på ett hjul som roterar med vinkelhastigheten $\dot{\theta} = \omega$. Vid $t=0$ är den aktuella ekern riktad längs x-axeln och kulan befinner sig i origo.

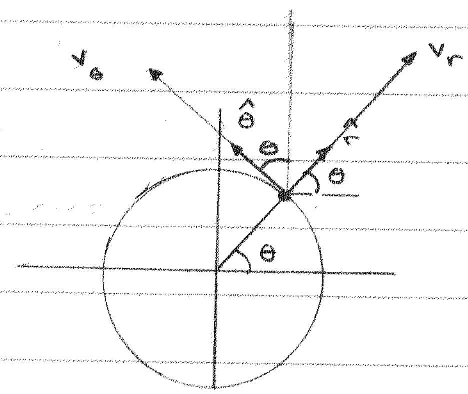
1) Bestäm hastigheten $\bar{v}(t)$ i såväl polära som cartesiska koordinater.

Polära koord.: $r = ut$, $\dot{r} = u$, $\dot{\theta} = \omega$

$$\Rightarrow \bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = u\hat{r} + ut\omega\hat{\theta}$$

För att bestämma hastigheten fullständigt måste vi känna $\hat{r}$ och $\hat{\theta}$.

Detta görs mha $\bar{r} = (r, \theta) = (ut, \omega t)$



Cartesiska koordinater:

Två hastigheter.

$$\begin{cases} v_x = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta \\ v_y = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta \end{cases}$$

$v_r = u \qquad v_\theta = r\omega = ut\omega$

$$\Rightarrow \bar{v} = (u\cos\omega t - \omega t\omega \sin\omega t)\hat{i} + (u\cdot\sin\omega t + ut\omega\cos\omega t)\hat{j}$$

2) Accelerationen $\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta} =$

$$= \underline{-ut\omega^2\hat{r} + 2u\omega\hat{\theta}}$$

Newtons lagar

Vi har lärt oss beskriva rörelse i kinematiken
Det som orsakar rörelsen beskrivs i dynamiken.

Fundament : Newtons 3 lagar.

Makroskopiskt : Kontaktkrafter — Fältkrafter.
Mikroskopiskt : 1) Gravitationskrafter
2) Elektromagn. krafter
3) Stark växelverkan (neutron – proton)
4) Svag växelverkan

Klassiska mekanikens spelplan : makroskopiska objekt (annars kvantmekanik)
hastigheter $<< c$ (—"— spec. rel. teori)
svaga gravitationsfält (—"— allm. rel. teori)

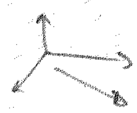
Newton : 1642 - 1727. 1665 Cambridge stängt pga pest. Då utvecklade han bl.a. differential- och infinitesimalkalkylen. Samtidigt med Leibnitz oberoende. Gräl senare.

Newtons 1:a lag.

Tröghetslagen : en fri partikel rör sig med konstant hastighet (utan acceleration)

Fri partikel : ingen växelverkan av något slag med omgivningen

Vem bestämmer vad som är en fri partikel. Rörelsen mäts i ett inertialsystem (tröghetssystem)

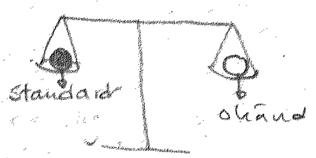
Om  är ett inertialsystem så är  också det om $\bar{v}$ = konst.

rotation innebär acceleration.
Jordens bana runt solen innebär acceleration. Dessutom snurrar den runt sin egen axel. Dock : $a_{r,bana} = 4.4 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$ (mot solen)
vid ekvatorn $a_{r,rotation} = 3,37 \cdot 10^{-2}\ m/s^2$ mot jordens mittpunkt.

∴ Jorden ≈ inertialsystem.

Massa : Tung massa — Trög massa

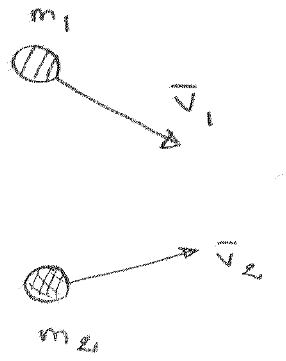
a) Tung massa



b) <u>Trög massa</u>

Betrakta två bollar som kolliderar elastiskt (som i biljard) med varandra

före | efter



$\bar{v}_1'$ och v_2'

Definiera

$\Delta\bar{v}_1 = \bar{v}_1' - \bar{v}_1$ och $\Delta\bar{v}_2 = \bar{v}_2' - \bar{v}_2$

Mät $\Delta\bar{v}_1$ och $\Delta\bar{v}_2$! Experimentellt $\dfrac{|\Delta\bar{v}_1|}{|\Delta\bar{v}_2|} = \text{konstant} = \dfrac{m_2}{m_1}$

Låt den ena massan ex. m_1 vara standardmassan 1kg

Bestäm m_2 mha $|\Delta\bar{v}_1| / |\Delta\bar{v}_2|$

Alternativ metod: $F = ma$ (exp. funnen lag)

1) Låt en viss kraft F verka på en kropp med massan m_1 (standardmassa ex. 1kg).
2) Mät den acceleration som F ger upphov till : a_1
3) Låt samma kraft F verka på en okänd massa m_2
4) Mät a_2 och bestäm m_2 mha

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$$

Massa är en universell storhet: $M = 70$ kg gäller såväl på jorden som på månen

Vikten är olika eftersom tyngdaccelerationen är olika.

Vi har nu redan utnyttjat <u>Newtons 2:a lag</u>, som säger att accelerationen för en kropp är direkt proportionell mot <u>nettokraften</u> som verkar på den och omvänt proportionell mot dess massa.

eller $\boxed{\sum \bar{F} = m\bar{a}}$

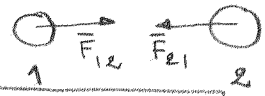
$$\Rightarrow \boxed{\sum F_x = ma_x \;,\; \sum F_y = ma_y \;,\; \sum F_z = ma_z}$$

Med $\bar{p} = m\bar{v}$ = rörelsemängden kan vi skriva Newtons 2:a lag: $\boxed{\sum \bar{F} = \dfrac{d\bar{p}}{dt} \qquad \sum F_x = \dfrac{dp_x}{dt} \;,\; \sum F_y = \dfrac{dp_y}{dt} \;,\; \sum F_z = \dfrac{dp_z}{dt}}$

och få med de fall där massan ändras i tiden. (Raket)

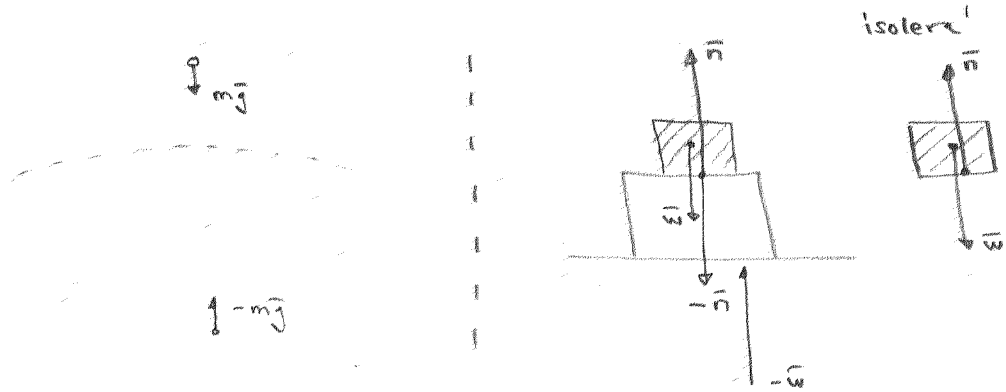
Enhet för kraft : $1\,kgm/s^2 = 1\,N$. (Newton)

<u>Newtons 3:e lag.</u> : När två kroppar växelverkar med varandra, är kraften på 1 från 2 lika stor och motriktad som kraften på 2 från 1.



$$\boxed{\bar F_{12} = -\bar F_{21}}$$

ex.



Hästen - kärran

<u>Tillämpningar</u>

Alltid vid problemlösning : a) rita tydlig figur

b) frilägg kropparna (nya figurer ev.)

c) red ut och rita in vilka krafter som verkar på var och en av kropparna (inkludera yttre krafter ex. tyngdkraft s.k. aktionskrafter och reaktionskrafter ex normalkrafter, snörkrafter)

Två fall

1) Jämvikt : systemet rör sig inte alls, dvs det är i jämvikt
Detta behandlas i <u>statiken</u>

Vid jämvikt : $\Sigma \bar F = \sum_i \bar F_i = 0$

ex