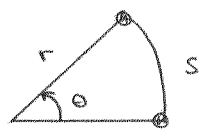
Rotation av en stel kropp runt fix axel.

Vi ska nu studera system av partiklar sådana att de bildar helt stela (otöjbara och oböjbara) kroppar. Vi begränsar oss till rotationer där rotationsaxeln pekar åt samma håll under hela rörelsen.

Utvidgningen till kroppar innebär att antalet partiklar som är inblandade blir "oändligt", men ett antal fiffiga definitioner och en "översättningstabell" kan använda mycket av tänkandet från studiet av enskilda partiklar när vi behandlar kroppar.

En stel kropps rörelse (ex metallcylinder som rullar på en väg) kan delas in i två delar, dels tyngdpunktens translationsrörelse och dels rotationen runt tyngdpunkten. När det gäller den senare rörelsen är storheter som vinkel, vinkelhastighet och vinkelacceleration viktiga.

med θ i radianer:



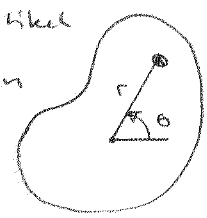
$$s = r\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

el. $v = r\cdot\dot{\theta} = r\cdot\omega$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta}$$

för fix partikel är avst. till rotationsaxeln r konstant



Vi kan nu ta fram en rad ekvationer som beskriver rotationen genom samma resonemang som vi förde när vi behandlade endimensionell rörelse. Vi byter x mot θ, v mot ω och a mot α.

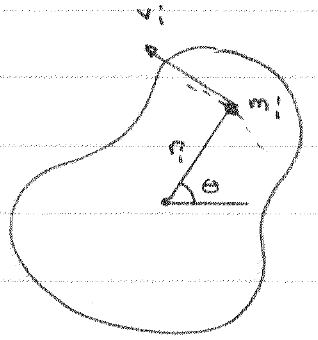
$v = v_0 + at$	$\longrightarrow$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	$\longrightarrow$	$\theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\longrightarrow$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\longrightarrow$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Vidare: $v = \omega r \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a_\theta = \frac{d\omega}{dt}\cdot r$ eller $a_\theta = \alpha\cdot r$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = r\omega^2$$

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_\theta \qquad a = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

Rotationsenergi.



Partikeln i:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

alla partiklar i kroppen rör sig med samma vinkelhast. ω

Hela kroppen:

$$K_R = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2$$

$$\therefore \quad K_R = \frac{1}{2}\left(\sum m_i r_i^2\right) \omega^2$$

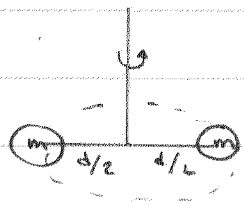
Vi definierar nu tröghetsmomentet I enligt:

$$I \equiv \sum m_i r_i^2$$

och skriver

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{(kroppens rotationsenergi)}$$

Ex. O_2-molekyl.



$d = 1,21$ Å $= 1,21 \cdot 10^{-10}$ m

$m = 2,66 \cdot 10^{-26}$ kg.

$$I = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{2} = 1,95 \cdot 10^{-46} \text{ kgm}^2$$

med $\omega = 4,60 \cdot 10^{12}$ rad/s

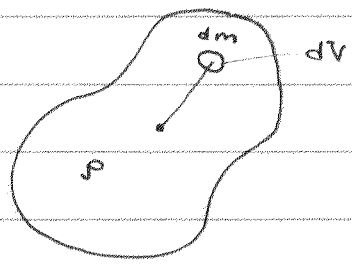
får vi:

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 1,95 \cdot 10^{-46} \cdot (4,60 \cdot 10^{12})^2 \text{ J}$$

Observera att för en viss kropp beror I på rotationsaxelns läge.

Beräkning av tröghetsmoment (allmänt)

$$I = \int r^2 \, dm$$



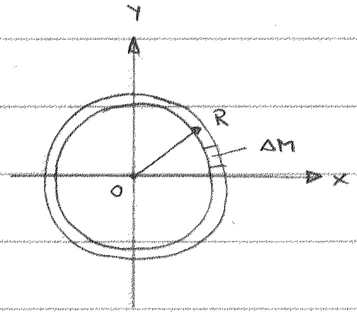
densiteten.

$$dm = dV \cdot \rho$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \rho r^2 \, dV$$

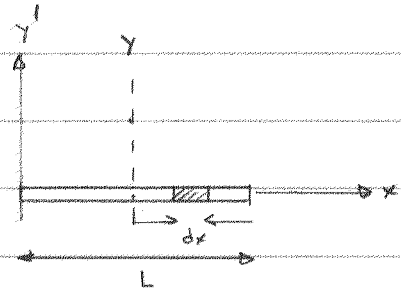
Ibland är det praktiskt att införa massa per ytenhet σ, eller massa per längdenhet λ.

Ex. i) I för en homogent tunn ring vid rotation runt z-axeln



$$I_z = \int r^2 \cdot dm = R^2 \int dm = R^2 \cdot M.$$

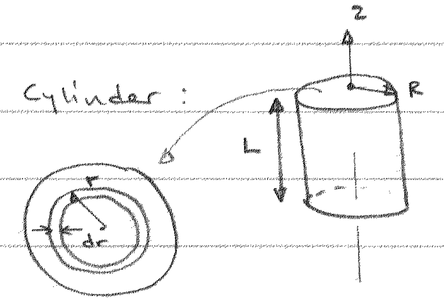
ii) I för en jämntjock stav.



y: $$I_y = \int r^2 \, dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2$$

y': $$I_{y'} = \int r^2 \, dm = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 \, dx = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3} ML^2$$

iii) Cylinder:



volym

$$I_z = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 (2\pi r \cdot dr \cdot L)\rho =$$

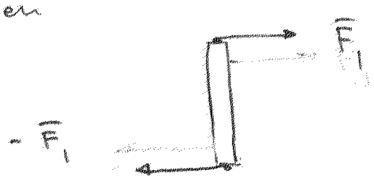
$$= 2\pi \rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \rho L R^4}{2} = (\pi R^2 \cdot L)\rho \frac{1}{2} R^2$$

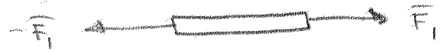
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

Moment

Nödvändigt villkor för jämvikt: $\bar{F}_{netto} = 0$

Dock ej tillräckligt om kroppen har utsträckning:

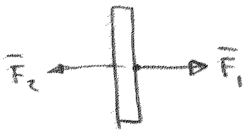




Villkoret för jämvikt: $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$

$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$

$\bar{F}_1$ och $\bar{F}_2$ måste verka längs en gemensam linje som definieras av angreppspunkt och vektor.



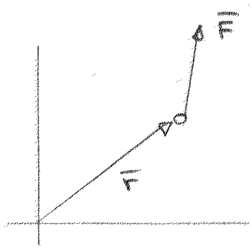
Detta villkor kan formuleras mer kompakt om vi inför begreppet <u>moment</u> (el. kraftmoment) eng. torque τ

Vi definierar också rörelsemängdsmomentet $\bar{L}$ som vi ska visa är konstant för en kropp som utsätts för en centralkraft.

Vi kommer att behandla vridning och rotation

Om vi inför momentet enligt

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$



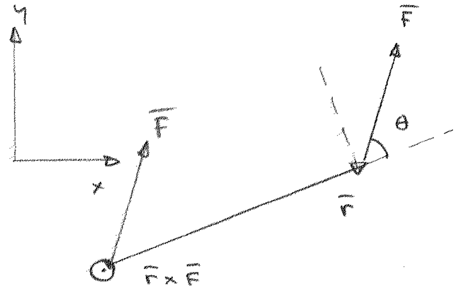
där

$\bar{F}$ = den angripande kraften

$\bar{r}$ = ortsvektorn för den punkt där $\bar{F}$ angriper

så kan vi skriva villkoret för jämvikt enligt

> Två krafter $\bar{F}_1$ och $\bar{F}_2$ är ekvivalenta om och endast om $|F_1| = |F_2|$ och om $\bar{F}_1$ och $\bar{F}_2$ ger samma moment räknat till en godtycklig punkt.



$|\bar r \times \bar F| = |\bar r|\,|\bar F| \cdot \sin\theta$

$\bar F$:s projektion $\perp \bar r$

$$\bar r \times \bar F = \left[(yF_z - zF_y),\ (zF_x - xF_z),\ (xF_y - yF_x) \right]$$

om $\bar r$ och $\bar F$ båda ligger i xy-planet dvs samma z-komp. är z och $F_z = 0$

$$\Rightarrow \quad \bar r \times \bar F = (0, 0, (xF_y - yF_x))$$

Statiska fallet som vi fördjupar oss i senare:

Godtyckligt antal krafter: jämvikt om $\sum_i \bar F_i = 0$ (ingen translation)

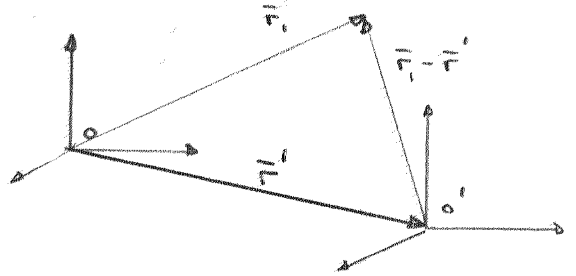
och

$\sum \bar \tau = 0$ (ingen rotation)

Om en kropp är i translatorisk jämvikt ($\sum_i \bar F_i = 0$) och nettomomentet är noll med avseende på någon punkt, så är nettomomentet noll m.a.p vilken annan punkt som helst - ty

Moment map o

$$\sum \bar\tau_o = \bar r_1 \times \bar F_1 + \bar r_2 \times \bar F_2 + \bar r_3 \times \bar F_3 + \dots$$



Moment map o':

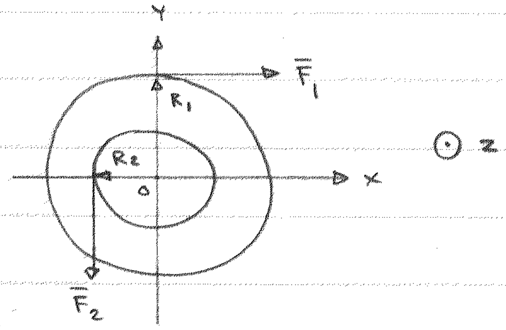
$$\sum \bar\tau_{o'} = (\bar r_1 - \bar r') \times \bar F_1 + (\bar r_2 - \bar r') \times \bar F_2 + (\bar r_3 - \bar r') \times \bar F_3 + \dots =$$

$$= \bar r_1 \times \bar F_1 + \bar r_2 \times \bar F_2 + \bar r_3 \times \bar F_3 + \dots - \bar r' \times \underbrace{(\bar F_1 + \bar F_2 + \bar F_3 + \dots}_{=0}$$

$$\therefore \quad \sum \bar\tau_o = \sum \bar\tau_{o'}$$

Detta innebär att vi i det statiska fallet (vare sig translation eller rotation) kan välja att räkna ut momentet med avseende på en "beräkningssnål" punkt.

Exempel



$\bar{\tau}_1 = \bar{R}_1 \times \bar{F}_1 \quad \otimes$ längs $-\hat{z}$

$\bar{\tau}_2 = \bar{R}_2 \times \bar{F}_2 \quad \odot$ längs $+\hat{z}$

$F_1 = 5{,}0\,N \quad , \quad R_1 = 1{,}0\,m$

$F_2 = 6{,}0\,N \quad , \quad R_2 = 0{,}50\,m$

$$\bar{\tau}_{netto} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2$$

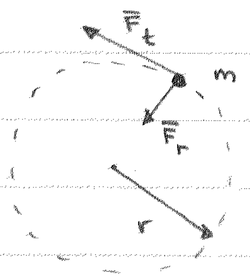
$$|\bar{\tau}_1| = R_1 F_1 \quad , \quad |\bar{\tau}_2| = R_2 F_1$$

$$\bar{\tau}_{netto} = (-R_1 F_1 + R_2 \bar{F}_2)\,\hat{z} = (-5+3)\,\hat{z} = -2{,}0\,\hat{z}$$

enhet Nm.

$\Rightarrow$ rotation medurs.

Samband mellan moment och vinkelacceleration.



$$F_t = m\frac{dv}{dt} = m a_t$$

$s = r\theta$

$v = r\omega$

$a_t = r\alpha$

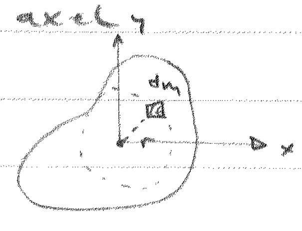
Moment m.a.p. cirkelcentrum:

$$\tau = F_t \cdot r = (m a_t)\, r = (m r \alpha)\, r =$$

$$= m r^2 \alpha = I \alpha$$

$$\therefore \quad \boxed{\tau = I\alpha} \qquad \text{jfr. } F = ma$$

Utvidga till stel kropp som roterar kring en fix axel.



$$dF_t = (dm)\, a_t$$

moment på dm: $d\tau = r \cdot dF_t = r\,dm\, a_t =$

$$= r\,dm\, r\alpha = (r^2 dm)\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{netto} = \int d\tau = \alpha \int r^2\, dm = \alpha I$$

<u>Notera</u> att vi får ett så enkelt uttryck trots att olika delar av kroppen inte upplever samma kraft, linjär acceleration eller linjär hastighet.

Föreläsning 10

Rep.

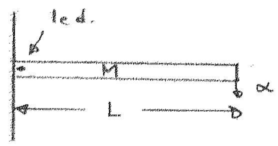
$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{där} \quad I = \int r^2 dm$$

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} \quad , \quad \tau = I\alpha \quad , \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

ex. 10.11

Bestäm α initialt.

moment τ och tröghetsmoment I räknat map leden



tyngdpunkten: $\tau = \left(\frac{L}{2}\right) \cdot Mg$

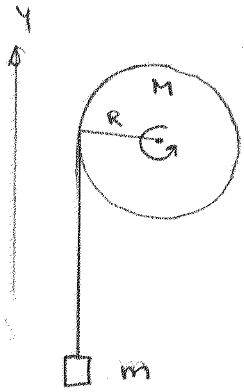
sedan tidigare $I = \frac{1}{3} ML^2$

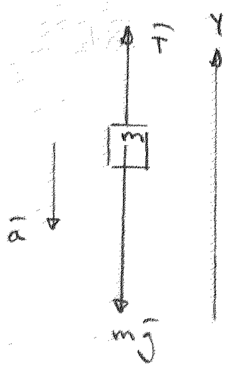
$$\tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{L/2 \; Mg}{\frac{1}{3} ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

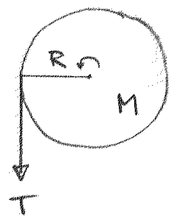
noterа: $a_t = R\alpha = L\alpha = \frac{3}{2} g > g$!

10.12

Bestäm: a för massan m
α för hjulet
T i snöret







$$\tau = I\alpha = TR \Rightarrow \alpha = \frac{TR}{I} \qquad (1)$$

massan m: $\sum F_y = T - mg = -ma \Rightarrow a = \frac{mg - T}{m} \qquad (2)$

samband mellan a och α: $a = a_{t,R} = R\alpha$

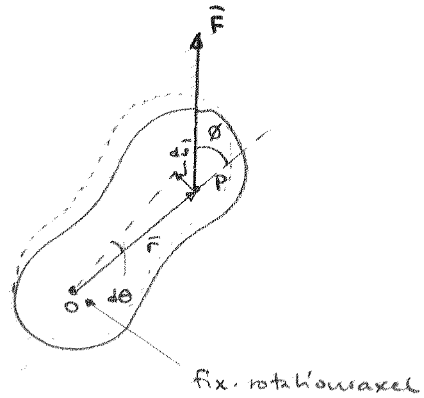
Använd det senare och utnyttja (1) och (2):

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m} \quad (3) \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + mR^2/I} \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{g}{1 + I/mR^2} \\[2ex] \alpha = \dfrac{g}{R + I/mR} \end{cases} \qquad I = \frac{1}{2} MR^2$$

Arbete, effekt och energi vid rotationsrörelse

Kraften $\bar{F}$ appliceras i punkten P.



$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = (F \cdot \sin\phi)\, r \cdot d\theta \quad (1)$$

$$ds = r \cdot d\theta$$

men momentet av $\bar{F}$ map O:

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = rF \cdot \sin\phi \quad (2)$$

(1) och (2) ger nu: $\underline{dW = \tau\, d\theta}$

$$\Rightarrow \quad \underline{P = \text{effekten} = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega}$$

Arbete vid rotation $\theta_0 \rightsquigarrow \theta$: $W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta$

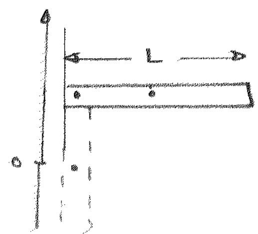
men $\tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega$

$\Rightarrow \quad \tau \cdot d\theta = I\omega\, d\omega$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad W = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2$$

∴ $\boxed{\text{arbetet = ändring av rotationsenergin}}$

ex. 10.15. ω i vertikalläget



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

horisontalläge (pot.en.): $E = U = Mg\frac{L}{2}$

vertikalläge (kin.en): $E = K = \frac{1}{2} I\omega^2$

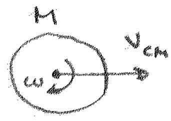
$$U = K \Rightarrow \frac{1}{2} MgL = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} ML^2\right)\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

För en kropp som utför rotations- och translationsrörelse samtidigt har vi:

$$K = K_{trans} + K_{rot}$$

rullande sfär ex.

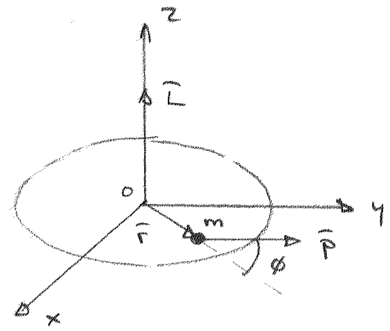


$$K = \frac{1}{2} I_{cm}\,\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

men $v_{cm} = R\omega \Rightarrow \omega^2 = \dfrac{v_{cm}^2}{R^2}$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{cm}}{R^2} + M\right) v_{cm}^2$$

Rörelsemängdsmoment $\bar{L}$:



$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$

$|\bar{L}| = rmv \cdot \sin\phi$

samband mellan $\bar{L}$ och $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} =$$

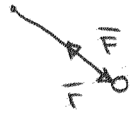
$$= \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \underbrace{\bar{v} \times m\bar{v}}_{=0} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$\therefore \boxed{\bar{\tau} = \dfrac{d\bar{L}}{dt}}$ Det krävs ett moment för att ändra rörelsemängdsmomentet.

Obs! $\bar{\tau}$ och $\bar{L}$ måste bestämmas map samma origo.

Centralkraft:

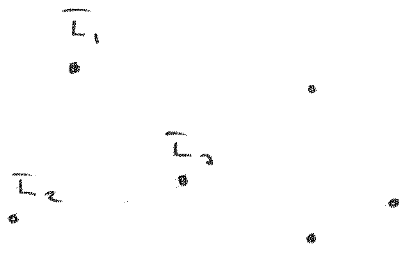
viktigt specialfall



$\bar{F} \parallel \bar{r} \Rightarrow \bar{\tau} = 0$

$\therefore \dfrac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L} = \text{konst.}$

Flera partiklar

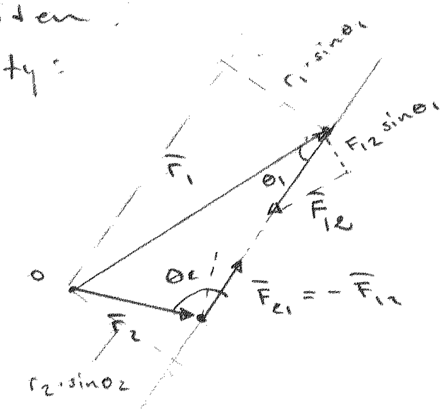


$$\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i$$

$$\sum \bar{\tau}_{ext} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

Moment orsakade av intern växelverkan orsakar ingen ändring av $\bar{L}$ i tiden.

ty:



$\bar{\tau}_{1,int} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_{12}$ $\otimes$

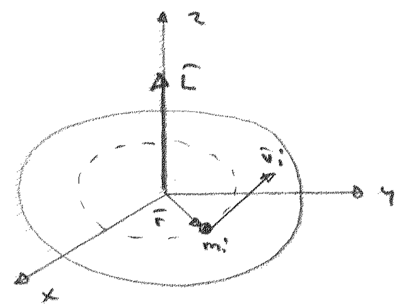
$|\bar{\tau}_{1,int}| = r_1 F_{12} \cdot \sin\theta_1$

$\bar{\tau}_{2,int} = \bar{r}_2 \times \bar{F}_{21}$ $\odot$

$|\bar{\tau}_{2,int}| = r_2 F_{21} \cdot \sin\theta_2$

$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \cdot \sin\theta_2$ $\therefore$ $\bar{\tau}_{1,int} = -\bar{\tau}_{2,int}$

$\bar{L}$ för roterande stel kropp.



enskild partikel: $L_i = m_i r_i^2 \omega$

Totalt:

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega = I \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

$$\therefore \boxed{\sum \tau_{ext} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha}$$

Konservering av $\bar{L}$:

För ett system av partiklar som inte utsätts för något externt moment är $\bar{L}$ konstant

$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\bar{L}}{dt} = 0$$

eller $I\omega = \text{konstant}$

Statisk jämvikt

Villkor: $\Sigma \bar{F} = 0$ och $\Sigma \bar{\tau} = 0$

Ex. 12.3

Givet: Sökt: T

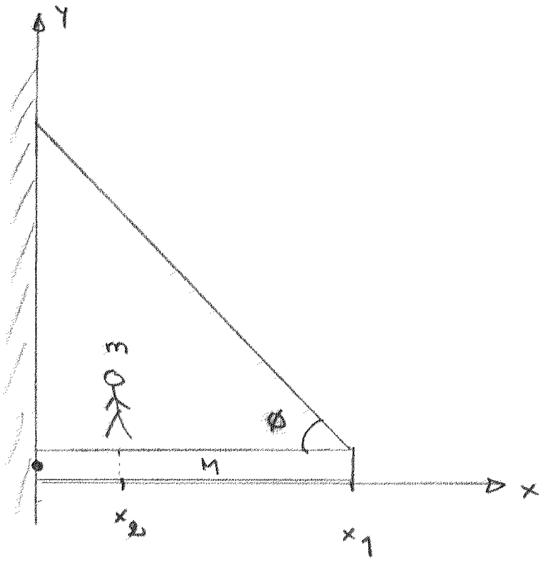
$x_1 = 8{,}00$ m

$x_2 = 2{,}00$ m

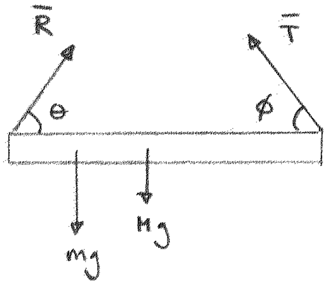
$Mg = 200$ N

$mg = 600$ N

$\phi = 53{,}0°$



Frilägg:



(1) $\Sigma F_x = R\cos\theta - T\cdot\cos\phi = 0$

(2) $\Sigma F_y = R\cdot\sin\theta + T\cdot\sin\phi - mg - Mg = 0$

R, T och θ obekanta och bara 2 ekv.

momentjämvikt:

moment m.a.p. leden:

(3) $\Sigma \tau_0 = T\cdot\sin\phi\cdot x_1 - mg\cdot x_2 - Mg\cdot\frac{x_1}{2} = 0$

(3) ger $T = \dfrac{mg\cdot x_2 + Mg\frac{x_1}{2}}{\sin\phi\cdot x_1} = \dfrac{600\cdot 2{,}00 + 200\cdot 4{,}00}{\sin 53°\cdot 8{,}00}$ N $= \underline{\underline{313\ N}}$

Insättning i (1) och (2) ger:

$R\cdot\cos\theta = 188$ N

$R\cdot\sin\theta = 550$ N

$\Rightarrow \theta = 71{,}1°$, $R = 581$ N.

Lutande stege. 12.4

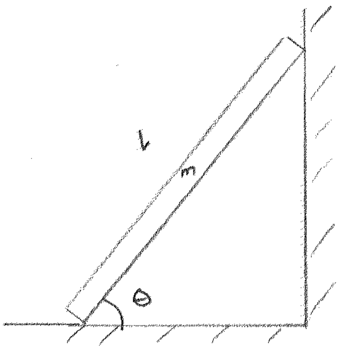
Givet:

$mg = 50N$

$\mu_s = 0{,}40$

Sökt:

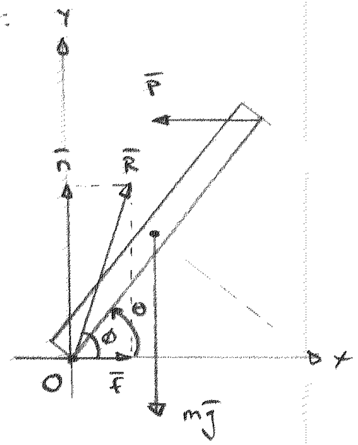
minsta vinkel θ_{min} som stegen kan stå med.



glatt vägg $\mu_s = 0$

mark med friktion μ_s

Friläggning:



jämvikt

$$\Sigma F_x = f - P = 0 \Rightarrow f = P$$

$$\Sigma F_y = n - mg = 0 \Rightarrow n = mg$$

När stegen är på vippen att glida omkull gäller

$$f = f_{max} = \mu_s n =$$

$$= 0{,}40 \cdot mg = 20N$$

För att komma åt θ_{min} studerar vi momentet med avseende på O:

$$\Sigma \tau_O = P(l \cdot \sin\theta) - w\left(\frac{l}{2} \cdot \cos\theta\right) = 0$$

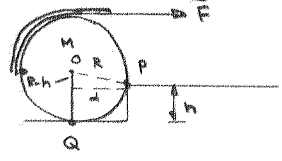
$P = 20N$, $w = 50N$

$$\Rightarrow 20 \cdot \sin\theta_{min} - 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\theta_{min} = 0$$

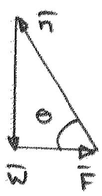
$$\Rightarrow \tan\theta_{min} = \frac{25}{20} \Rightarrow \theta_{min} = 51^\circ$$

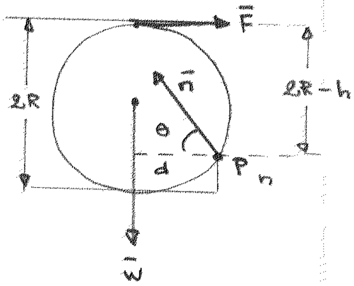
12.5.

Bestäm minimala kraften F för att dra cylindern uppför steget samt reaktionskraften vid P



$$d = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$





Just när cylindern lyfter är reaktionskraften ($\bar{n}_Q$) vid Q lika med noll.

Moment m.a.p. P:

$$wd - F(2R-h) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w\sqrt{2Rh - h^2} - F(2R-h) = 0 \Rightarrow F = \frac{w\sqrt{2Rh-h^2}}{2R-h}$$

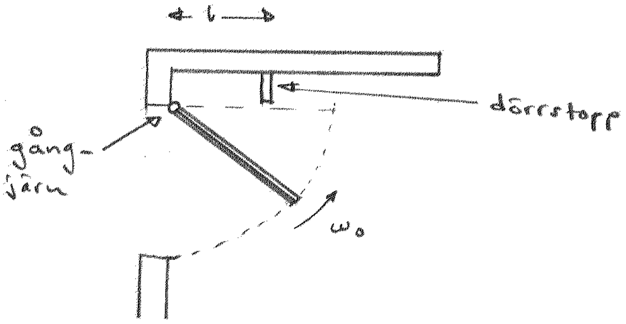
Vidare:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma F_x &= F - n \cdot \cos\theta = 0 \\ \Sigma F_y &= n \cdot \sin\theta - w = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{w}{F}$$

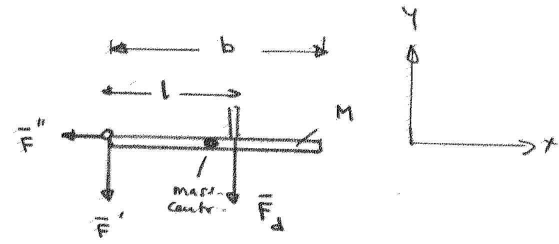
$$n = \sqrt{w^2 + F^2}$$

Dörrstopp.

Var ska dörrstoppen placeras för att påfrestningen på gångjärnen skall bli så liten som möjligt.



Krafter på dörren när den träffar dörrstoppen:



$\bar{F}_d$ = kraft orsakad av dörrstoppen

$\bar{F}''$ = kraft på dörren som möjliggör centripetalaccelerationen

$\bar{F}'$ = kraft på dörren orsakad av gångjärnet.

Mål: <u>gör F' så liten som möjligt!</u>

Studera situationen precis före och precis efter kollisionen mellan dörr och dörrstopp.

Utnyttja vad vi vet om rörelsemängdsmomentet hos dörren och rörelsemängden hos masscentrum för dörren och tag fram ett uttryck för F'.

$$dL = \tau \cdot dt \quad \Rightarrow \quad L_f - L_i = \int_{t_i}^{t_f} \tau \cdot dt$$

$$L_i = \omega_0 I \quad , \quad L_f = 0 \quad , \quad \tau = F_d \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad I\omega_0 = l \int F_d \cdot dt$$

integrationen sker över kollisionstiden

Masscentrum hos dörren lyder sambandet.

$$\bar{P}_f - \bar{P}_i = \int \bar{F} \cdot dt \qquad \bar{F} = \text{totala kraften.}$$

$$P_i = M v_y = M \frac{b}{2} \cdot \omega_0$$

$$F_y = -(F_d + F')$$

$$\Rightarrow \quad M \frac{b}{2} \omega_0 = \int (F' + F_d) dt$$

men: $\displaystyle \int F_d \, dt = \frac{I\omega_0}{l} \quad \Rightarrow \quad \int F' dt = \left(M \frac{b}{2} - \frac{I}{l} \right) \omega_0$

med $\displaystyle M \frac{b}{2} = \frac{I}{l}$ dvs $\displaystyle l = \frac{2I}{Mb}$ fås $F' = 0$

$$I = \frac{1}{3} M b^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\frac{2}{3} M b^2}{Mb} = \underline{\underline{\frac{2}{3} b}}$$

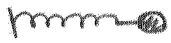
Samma resonemang för brännbollsträ, tennisracket, golfklubba, hammare

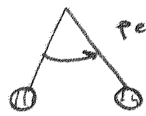
Föreläsning 11

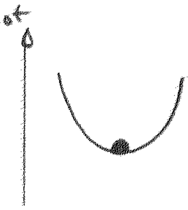
Harmonisk svängning

Viktigt fall i tillämpningar:

Ex.


fjäder


pendel



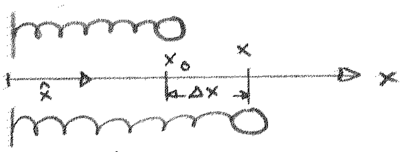
vibration i molekyl

växelström

elektromagnetiskt fält: ljus.

1) "Hookfjäder"

$F \sim \Delta x$



$F = -k(x - x_0)$

$\bar{F} = -k(x - x_0)\hat{x}$

återförande kraft.

sätt $x_0 = 0 \Rightarrow F = -kx$

F är här ett exempel på en konservativ kraft, dvs den fås från en potentiell energi $V(x)$ genom

$$F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$$

$$V(x) = -\int_0^x F(x)\,dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{1}{2}kx^2$$

Newtons 2:a lag $\dot{\bar{p}} = \bar{F}$ ger

$$m\ddot{x} = F_x = -kx$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

eller med $\omega^2 \equiv \frac{k}{m}$:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Lösning:

$$x(t) = A \cdot \cos\omega t + B \cdot \sin\omega t.$$

A och B är integrationskonstanter som bestäms genom anpassning till initialvillkor.

annan lösning: $x(t) = A' \cos(\omega t + \alpha)$

hur är den relaterad till $x(t) = A \cos\omega t + B \cdot \sin\omega t$. ?

Jo: $A' \cos(\omega t + \alpha) = A'(\cos\omega t \cdot \cos\alpha - \sin\omega t \cdot \sin\alpha)$

med $A = A' \cdot \cos\alpha$ och $B = -A' \sin\alpha$

$\Rightarrow A'^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = A^2 + B^2 \Rightarrow (A')^2 = A^2 + B^2 \Rightarrow A' = \pm\sqrt{A^2+B^2}$

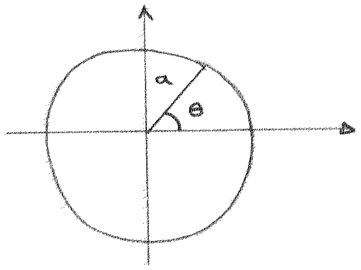
och $\frac{B}{A} = -\tan\alpha \Rightarrow \alpha = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right)$

dvs med kraven
$$\begin{cases} A' = \pm\sqrt{A^2+B^2} \\ \alpha = \arctan\left(-\frac{B}{A}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad A \cdot \sin\omega t + B \cdot \cos\omega t \Leftrightarrow A'(\cos\omega t + \alpha)$$

Igen: period $T = \frac{1}{f}$ $\omega = 2\pi f$

Ett annat sätt att se på en harmonisk svängning är följande



$\bar{r}(t) = (\cos\omega t, \sin\omega t) a$

$\theta = \omega t + \theta_0$

$\Rightarrow \bar{r}(t) = [\cos(\omega t + \theta_0), \sin(\omega t + \theta_0)] a$

Projektionen på koordinataxel (x el. y) av cirkelrörelsen beskriver en harmonisk svängning.

$x = a \cos(\omega t + \theta_0)$

$y = a \sin(\omega t + \theta_0) = a \cos(\omega t + \theta_0 - \frac{\pi}{2})$

Cirkelrörelsen är ihopsatt av två harmoniska svängningsrörelser 90° (el. π/2 radianer) ur fas.

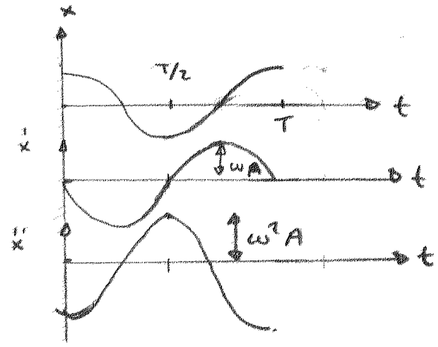
Ett annat sätt att sätta ihop två harmoniska svängningar för x och y:

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \omega t \\ y = b \cdot \cos(\omega t + \delta) \end{cases}$$

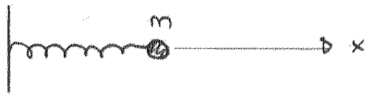
olika amplituder a och b och godtycklig fasskillnad δ

Hastighet och acceleration:

$$x = A \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt} = v = -\omega A \cdot \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = a = -\omega^2 A \cos \omega t$$



Arbete och energi



$$x = A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad \Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$V(x) = \frac{1}{2} k x^2 = \left[\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega^2 \right] = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) = E_p$$

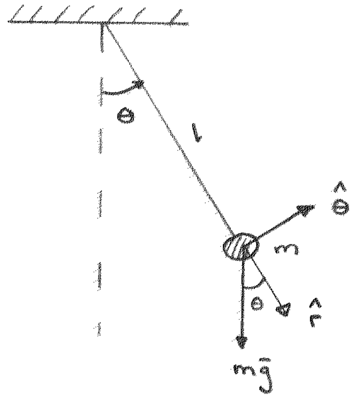
$$E = E_k + E_p = \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \delta) + \frac{m}{2} A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \delta) =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} k A^2$$

Notera: i) Totala energin är konstant precis som vi väntar oss av en konservativ kraft

ii) Totala energin är proportionell mot amplituden i kvadrat $E \sim A^2$

Pendeln.



Beskrivning av rörelsen:

$r =$ konstant $= l$

använd polära koordinater

$$\begin{cases} \bar{a}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{r} \\ \bar{a}_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\theta} \end{cases}$$

här $\quad \bar{a}_\theta = r\ddot{\theta}\,\hat{\theta}$

Newtons 2:a lag: $\quad -mg \cdot \sin\theta = ml\ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0} \quad \text{el.} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

icke-linjär differentialekv.

Vi kan göra ekv. linjär m.h.a. approximationen $\sin\theta \approx \theta$ för små svängningar.

Med $\omega^2 \equiv \frac{g}{l}$ får vi: $\quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$

$$\Rightarrow \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \delta) \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

svängningstid: $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ $\qquad$ Obs! oberoende av massan m

---

Bättre approximation:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0) + \dots$$

här: $x = \theta$

$f(\theta) = \sin\theta \quad \Rightarrow f'(\theta) = \cos\theta, \quad f''(\theta) = -\sin\theta, \quad f'''(\theta) = -\cos\theta, \dots$

$x_0 = 0$

$$\therefore \sin(\theta) = \sin(0) + \cos(0)\cdot\theta + \frac{1}{2}(-\sin 0)\,\theta^2 + \frac{1}{6}(-\cos 0)\,\theta^3 + \dots =$$

$$= 0 + 1\cdot\theta + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot\theta^2 + \frac{1}{6}(-1)\cdot\theta^3 + \dots =$$

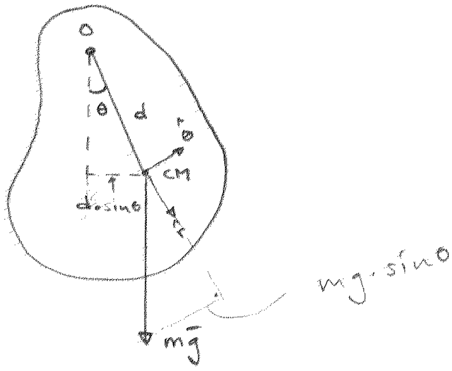
$$= \theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \dots$$

Hur bra är approximationen $\sin\theta \approx \theta$ (θ i radianer naturligtvis)

Felet är bara 1% om $\theta = 15^\circ$ dvs $\theta = 0{,}262$ radianer.

Fysikaliska pendeln.

Betrakta en fast kropp som är ledad i en punkt O på avståndet d från masscentrum



tröghetsmom. map O

$$\left.\begin{aligned} \tau &= mg(d\cdot\sin\theta) = I\alpha \\ \alpha &= \frac{d^2\theta}{dt^2} \\ a_\theta &= r\alpha = r\ddot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -mgd\cdot\sin\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

kraften strävar efter att minska θ

Vi antar igen att θ är liten

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{mgd}{I}\right)\theta = -\omega^2\theta$$

där

$$\omega^2 \equiv \frac{mgd}{I}$$

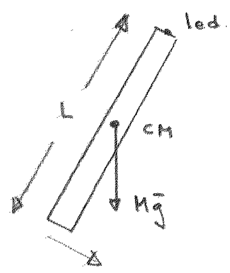
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$$

om vi känner masscentrum och således d kan I bestämmas genom en mätning av perioden T.

För pendeln 

gäller $I = md^2 \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{md^2}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

Ex. 13.8 Svängande stav.



$d = L/2$

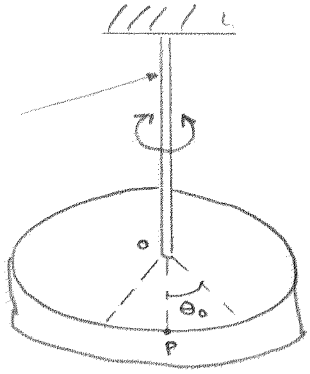
$$I = \frac{1}{3}ML^2$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}ML^2}{mg\frac{L}{2}}} =$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

Torsionspendeln.

Återförande moment från tråden



$$\left.\begin{aligned} \tau &= -K\theta \\ \tau &= I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

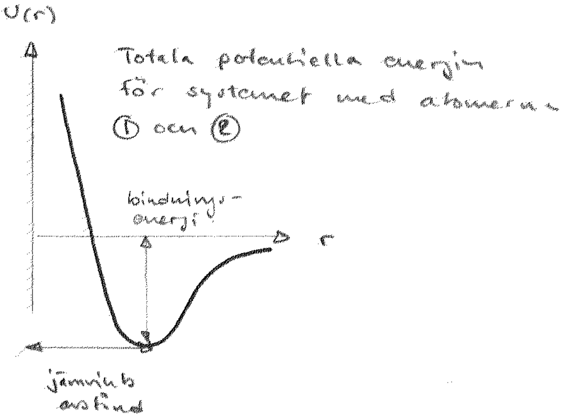
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{K}{I}\,\theta$$

med $\omega^2 \equiv \frac{K}{I}$ får vi $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K}}$

Fö 12.

Små svängningar. Molekylers mekanik.

Två atomer kan som bekant bilda en molekyl om det finns en attraktiv kraft mellan dem.
Energin hos en stabil molekyl är lägre än den totala energin hos de separerade atomerna.



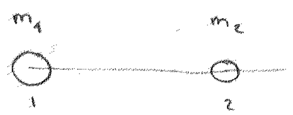
Den totala energin hos systemet kan approximeras enligt

$$U = -\frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^m}$$

A och B är konstanter och n och m heltal.

Inom molekylspektroskopin spelar rotationer och vibrationer stor roll.

Rotationer i diatomära molekyler.



$$\boxed{\begin{aligned} m_1 \ddot{\bar{x}}_1 &= \bar{F}_{12} \\ m_2 \ddot{\bar{x}}_2 &= \bar{F}_{21} = -\bar{F}_{12} \end{aligned}}$$

addera ekv!

$$\Rightarrow \quad m_1 \ddot{\bar{x}}_1 + m_2 \ddot{\bar{x}}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\left(m_1 \bar{x}_1 + m_2 \bar{x}_2 \right)}_{M \bar{x}_{tp}} = 0$$

$M = m_1 + m_2$

∴ tyngdpunktens acceleration $= 0$

Multipl. ekv med m_2 resp. m_1
subtrahera ekv!

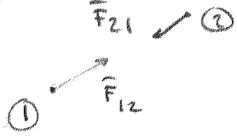
$$\Rightarrow \quad m_1 m_2 \left(\ddot{\bar{x}}_1 - \ddot{\bar{x}}_2 \right) = m_2 \bar{F}_{12} - m_1 \bar{F}_{21} = (m_2 + m_1) \bar{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \right)}_{\bar{r}_{12}} = \bar{F}_{12}$$

$\bar{F}_{12} = F \, \hat{r}_{12}$

med $\mu \equiv \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ så har vi $\mu \dfrac{d^2 r}{dt^2} = F(r)$

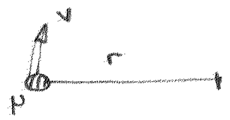
Den relativa rörelsen för två partiklar under en kraft.



beskrivs av en partikel med reducerade massan

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Om molekylen roterar har den en rotationsenergi enligt.



$$\left.\begin{array}{l} E_{rot} = \frac{1}{2}\mu v^2 \\ L = \mu v r \end{array}\right\} \Rightarrow E_{rot} = \frac{1}{2}\mu \frac{L^2}{\mu^2 R^2} = \frac{L^2}{2I}$$

där I = tröghetsmomentet $= \mu R^2$

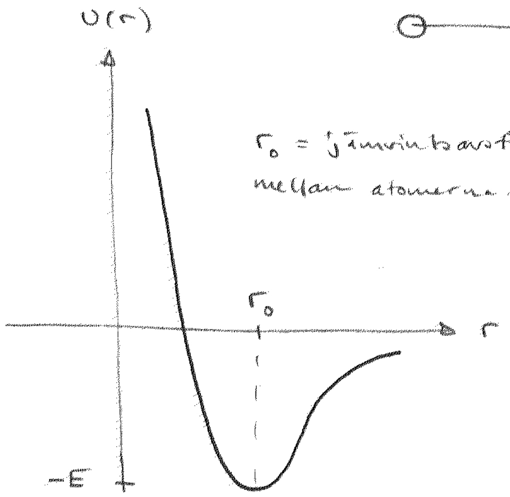
I denna klassiska beskrivning kan E_{rot} anta vilka värden som helst.

En kvantmekanisk behandling ger dock att L endast kan anta vissa diskreta värden, vilket medför att rotationsenergin är kvantiserad.

Vibrationer

Vad händer om det interatomära avståndet r i molekylen ändras?

Åter till $U(r)$-kurvan.



r_0 = jämviktsavståndet mellan atomerna.

Genom att utnyttja sambandet

$$F = -\frac{dU}{dr}$$

ser man att kraften är attraktiv (dvs strävar efter att minska r) om vi avlägsnar oss åt höger från r_0 och repulsiv (dvs strävar efter att öka r) om vi befinner oss till vänster om r_0

Ett analytiskt uttryck som beskriver potentialen är

$$U(r) = E\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$$

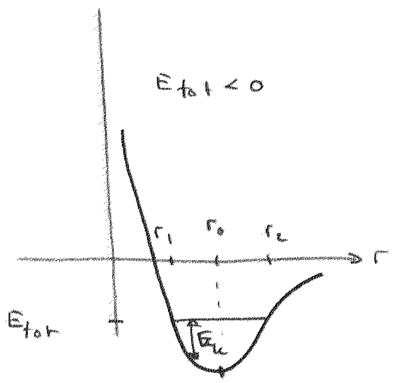
Lenard-Jones potentialen

snabb ökning då $r \to 0$, $r > r_0$ medför $U(r) \to 0$

Rörelser:

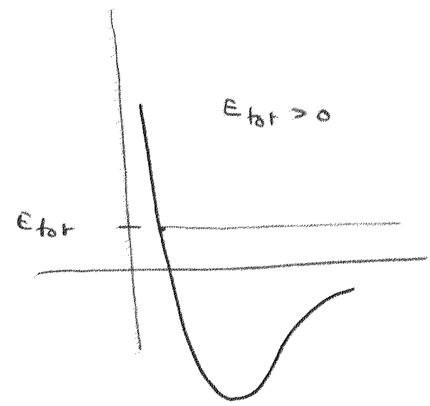
Två fall beroende på hur stor $E_{tot} = E_k + E_p$ är.

1)



rörelse mellan ändlägen r_1 och r_2

2)



molekylerna studsar mot varandra.

Mer utförlig behandling.

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = F(r) = -\frac{dU(r)}{dr}$$

studera rörelsen nära jämviktsläget $r = r_0$

$r = r_0 + \varepsilon$ där ε är en liten störning.

Taylorutveckling av potentialen.

$$U(r) = U(r_0) + U'(r_0)\overbrace{(r-r_0)}^{\varepsilon} + \frac{1}{2}U''(r_0)\overbrace{(r-r_0)^2}^{\varepsilon^2} + \mathcal{O}\left[(r-r_0)^3\right]$$

med

$$U(r) = E\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{r_0}{r}\right)^6\right]$$

får vi.

$$\frac{dU}{dr} = E\left[-12\frac{r_0^{12}}{r^{13}} + 12\frac{r_0^6}{r^7}\right]$$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = E\left[12\cdot 13\frac{r_0^{12}}{r^{14}} - 12\cdot 7\frac{r_0^6}{r^8}\right] = E\left[156\frac{r_0^{12}}{r^{14}} - 84\frac{r_0^6}{r^8}\right]$$

$$\Rightarrow U(r) = U(r_0) + U'(r_0)(r-r_0) + \frac{1}{2}U''(r_0)(r-r_0)^2 + \ldots =$$

$$= -E + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{E}{r_0^2}\cdot 72\right)(r-r_0)^2 + \ldots =$$

$$= -E + \frac{36E}{r_0^2}(r-r_0)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(r-r_0) = -\frac{72E}{r_0^2}(r-r_0) \qquad F \sim (r-r_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{med} \quad \omega = \sqrt{\frac{72E}{\mu r_0^2}}$$

$$\Rightarrow x = A \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

dvs harmonisk svängning runt jämviktsläget

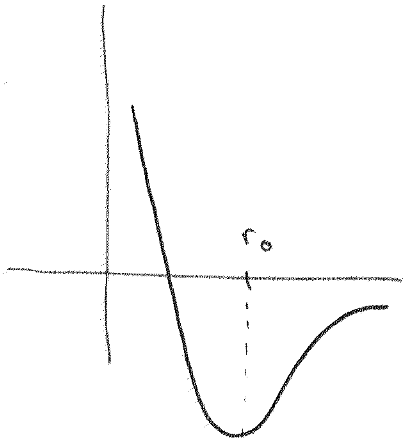
Detta var vad vi studerade på förra föreläsningen.
Vi ser här att $F = -kx$ el. $-k(r-r_0)$
är tillämpbart på många fler fall än fjädersvängningar.

<u>Nära</u> minimat är det ofta ok att approximera en allmän $U(r)$ med ett andragradspolynom.

Vibrationer i molekyler:

Vibrationsenergin: (klassiskt)

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$



$F = -k(r-r_0)$

Med hänsyn till kvantmekanisk betraktelse kan endast vibrationsenergin anta diskreta värden:

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Svängningar (forts)

För en odämpad fri svängning kan vi skriva

$m\ddot{x} = -kx$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \underbrace{\phi}_{\text{faskonstant}}) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Om vi inför dämpning blir differentialekvationen mer komplicerad. Om dämpningen orsakas av viskositeten hos mediet som rörelsen äger rum i (luft, vatten, glycerin ...) kommer den dämpande kraften (om hastigheten inte är alltför hög, ingen turbulens) att vara proportionell mot hastigheten och motriktad denna. Fjädersvängning i dämpande medium:

Newtons andra lag:

$$\Sigma F_x = -kx - bv = ma_x$$

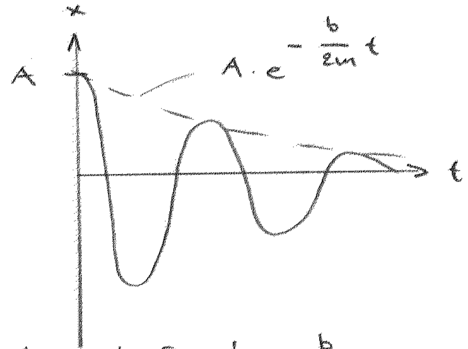
$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = A \cdot e^{-\frac{b}{2m}\cdot t} \cos(\omega t + \phi)$$

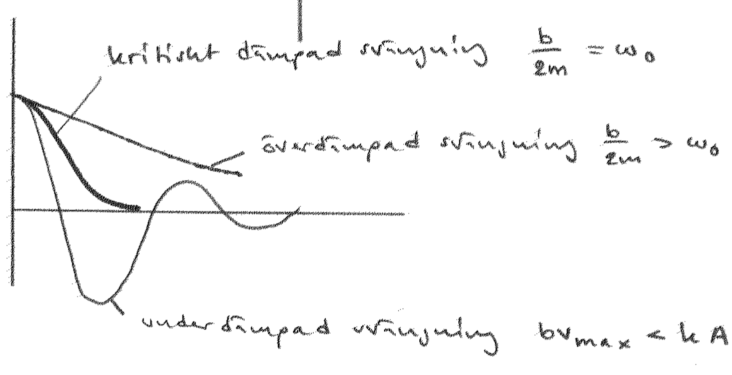
där

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} = \text{egenfrekvensen hos den odämpade svängningen.}$$



Genom att variera konstanten b kan dämpningen bli olika stark



Tvungna svängningar

om vi tillför energi till den dämpade svängningen med hjälp av en extern kraft $F_{ext} \cdot \cos \omega t$ får vi en differentialekv. enligt

$$F_{ext} \cdot \cos \omega t - kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

om vi väntar tillräckligt länge $(t \to \infty)$ får vi

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

där

$$A = \frac{F_{ext}/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

notera att svängningsfrekvensen ω blir densamma som frekvensen hos den externa kraften.