Tillämpningar av Newtons lagar.

1) $\sum \bar{F}_{ext} = 0 \Rightarrow m\bar{v} = \text{konstant}$

2) $\sum \bar{F}_{ext} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{v}\cdot\frac{dm}{dt} + m\frac{d\bar{v}}{dt} \Rightarrow \bar{F} = \sum \bar{F}_{ext} = m\bar{a}$

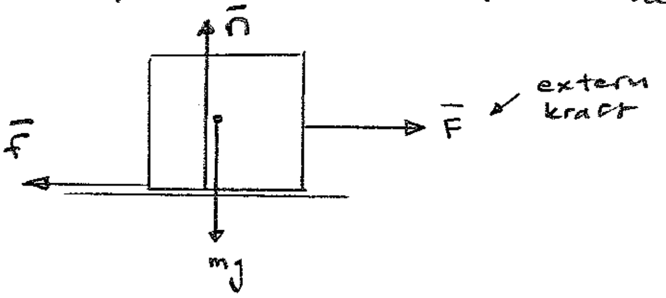
om $\frac{dm}{dt} = 0$

3) $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$

Friktion

Friktionskraften är den kraft som motverkar att kroppar rör sig i förhållande till varandra.

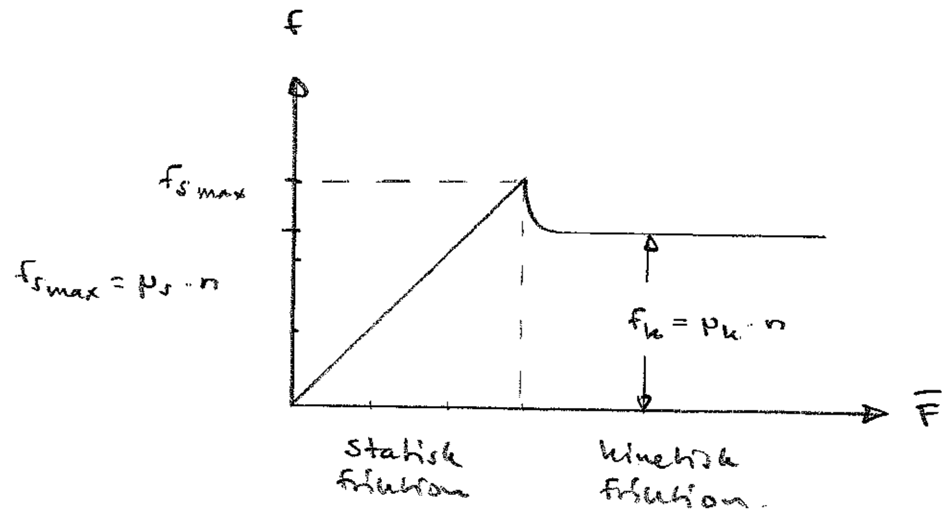
Mikroskopiskt är friktion ett komplext fenomen.



obs!

I det här fallet är normalkraften och tyngdkraften lika stora $|\bar{n}| = |m\bar{g}|$

DETTA GÄLLER INTE ALLTID! Se upp $\bar{n} \neq m\bar{g}$ ofta.



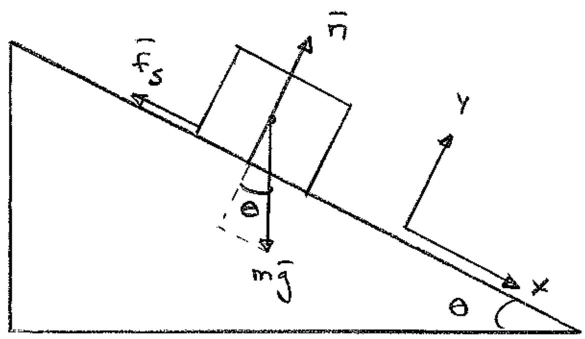
$\mu_s n$ = minimala kraften för att sätta två kroppar i rörelse relativt varandra.

μ_s : statiska friktions-koefficienten

μ_k : kinetiska eller dynamiska friktionskoeffic.

μ_k och μ_s beror på materialen samt ytans beskaffenhet

		μ_s	μ_k
ex.	stål/stål	$= 0{,}74$	$= 0{,}57$
	gummi/betong	$= 1{,}0$	$= 0{,}8$
	is/is	$= 0{,}1$	$= 0{,}03$



Mätning av μ_s:

stillastående block $\theta < \theta_c$

$$\Sigma \bar{F} = 0$$

dvs

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$x: \quad \Sigma F_x = mg \cdot \sin\theta - f_s = 0 \quad (1)$$

$$y: \quad \Sigma F_y = n - mg \cdot \cos\theta = 0 \quad (2)$$

obs! $n \neq mg$.

När θ ökar till θ_c kommer vi till den gräns där blocket börjar glida, dvs friktionskraften är fullt utvecklad dvs $f_s = \mu_s \cdot n$

(1) blir nu $\quad mg \cdot \sin\theta_c - \mu_s n = 0$

(2) —"— $\quad n = mg \cdot \cos\theta_c$

$$\Rightarrow mg \cdot \sin\theta_c = \mu_s mg \cdot \cos\theta_c$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c} = \tan\theta_c$$

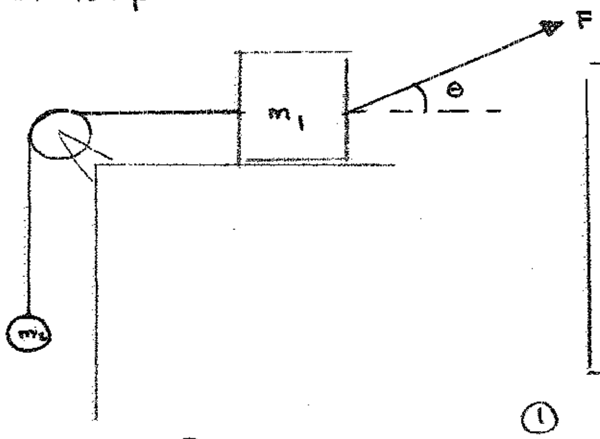
mätning av μ_k:

När blocket har börjat glida minskar man θ försiktigt tills blocket slutar att glida. Då gäller

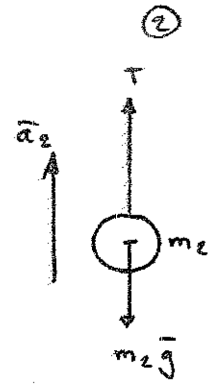
$$\mu_k = \tan\theta_c'$$

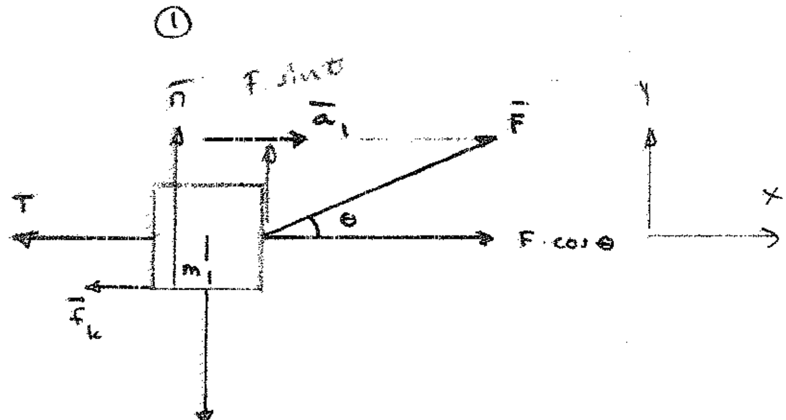
där θ_c' är den vinkel där glidningen upphör med friktion på

v)



Lägg märke till att vi har antagit rörelse i en viss riktning (positiva x-axelns riktning). Vi har då en friktionskraft på m_1 i negativ x-led. Vad händer om vi har gissat fel på rörelseriktningen? se nedan!





$$|\bar{a}_2| = |\bar{a}_1| = a$$

①
$$\Sigma F_x = F\cdot\cos\theta - f_k - T = m_1 a$$

$$\Sigma F_y = n + F\cdot\sin\theta - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad n = m_1 g - F\cdot\sin\theta \quad \text{obs! } \neq m_1 g$$

②
$$\Sigma F_x = 0$$

$$\Sigma F_y = T - m_2 g = m_2 a \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = m_2(a+g)}$$

$$\boxed{f_k = \mu n = \mu(m_1 g - F\cdot\sin\theta)}$$

In i översta ekv.: $\quad F\cdot\cos\theta - \mu(m_1 g - F\cdot\sin\theta) - m_2(a+g) = m_1 a$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{F(\cos\theta + \mu\sin\theta) - g(m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2} \quad ③$$

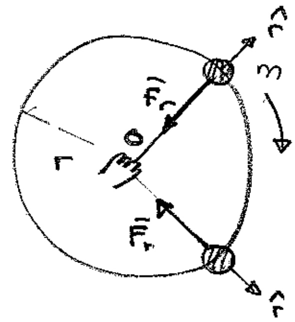
Om a blir negativ vid insättning av värden i ③ så måste vi "börja om"
Om m_1 rör sig längs neg. x-axeln så skrivs ① om enligt:

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma F_x = T - F\cos\theta - f_k = m_1 a \\ &\text{och ② blir} \\ &\Sigma F_y = m_2 g - T = m_2 a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a = \frac{F(\mu\sin\theta - \cos\theta) + g(m_2 - \mu m_1)}{m_1 + m_2}$$

Likformig cirkulär rörelse

Först: rörelse i horisontalplanet (boll i snöre)

$a_r = \frac{v^2}{r}$ $\bar{a}_r = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$



$\bar{F}_r = m\bar{a}_r = -m\frac{v^2}{r}\hat{r}$ riktad mot 0

$F_r = |\bar{F}_r| = m\frac{v^2}{r}$

Obs! I det här fallet vet vi att F_r kommer ifrån spännkraften i snöret, men om vi hade på oss glasögon med filter som gjorde att vi bara kunde se att bollen färdades med v=konst. runt i en cirkel med radien r så visste vi att summan av alla krafter som verkar på bollen $= m\frac{v^2}{r}$.

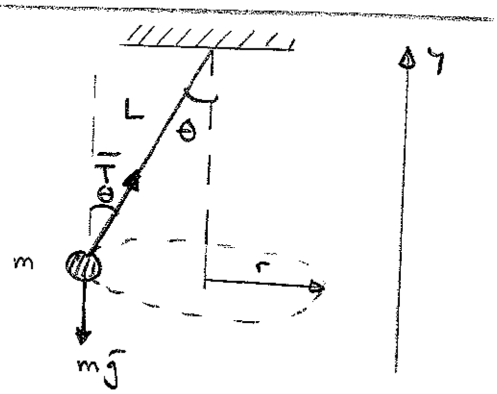
Om vi, i det här exemplet, låter bollen åka med allt högre fart blir spännkraften T i snöret allt större.

$$T = m\frac{v^2}{r}$$

Om T_{max} är största tillåtna spännkraft ges maximala farten v_{max} av

$$v_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}\, r}{m}}$$

Konisk pendel: exempel på fråga: Hur stor måste farten vara om radien = r.



Bollen beskriver en cirkulärrörelse i horisontalplanet ⇒ ingen nettokraft i y-led.

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow T\cdot\cos\theta - mg = 0$

$\Rightarrow T\cos\theta = mg. \Rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$

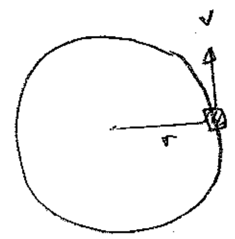
Kraften i horisontalplanet ger upphov till en cirkulär rörelse med farten v och radien r.

$\therefore \Sigma F_r = ma_r = m\frac{v^2}{r}$, $\Sigma F_r = T\cdot\sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta}\cdot\sin\theta = mg\tan\theta$

$\Rightarrow mg\cdot\tan\theta = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{rg\cdot\tan\theta}$

Bil i kurva.

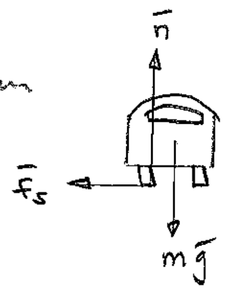
i) utan dosering: v_{max}?



$r = 35\,m$

$\mu_s = 0{,}523$

sett från sidan



$$f_s = m\frac{v^2}{r}$$

$$n = mg \Rightarrow f_{s,max} = \mu_s \cdot mg$$

$$\Rightarrow \mu_s \cdot mg = m\frac{v_{max}^2}{r}$$

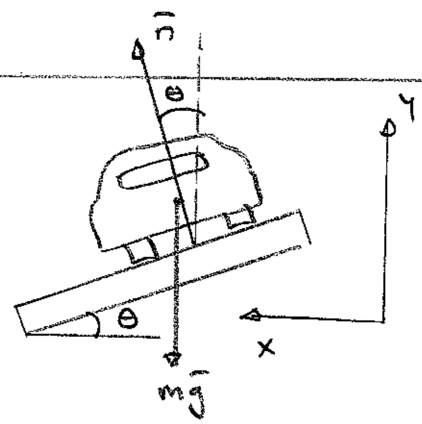
$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\mu_s g r} = \sqrt{0{,}523 \cdot 9{,}81 \cdot 35}$$

$$= \underline{\underline{13{,}4\ m/s}}$$

---

ii) med dosering men utan friktion (is,sig t)

Bestäm θ om $v = 13{,}4\ m/s$, $r = 35{,}0\ m$



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow n \cdot \cos\theta = mg$$

$$\Sigma F_x = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Sigma F_x = n \cdot \sin\theta = \frac{mg}{\cos\theta} \cdot \sin\theta = mg \cdot \tan\theta$$

$$\therefore\ m\frac{v^2}{r} = mg \cdot \tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{v^2}{rg}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{13{,}4^2}{35{,}0 \cdot 9{,}80}\right) = \underline{\underline{27{,}6^\circ}}$$

Om $\theta = 27{,}6^\circ$

$v < 13{,}4\ m/s$: bilen glider nedför vägbanan

$v > 13{,}4\ m/s$: bilen glider uppför vägbanan

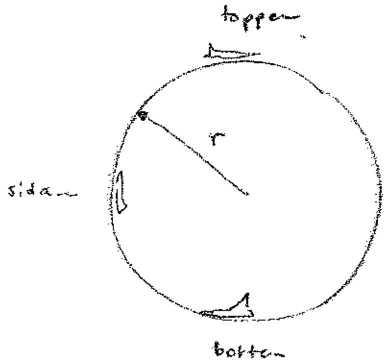
Looping

Givet:

$R = 2{,}70$ km

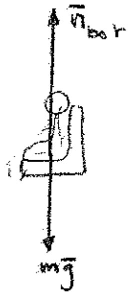
$v = 225$ m/s

Sökt: n vid olika lägen



Piloten:

botten:

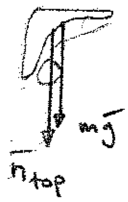


$$n_{bot} - mg = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow n_{bot} = mg + m\frac{v^2}{r} = mg\left[1 + \frac{v^2}{rg}\right] =$$

$$= 2{,}91\, mg$$

toppen



$$n_{top} + mg = m\frac{v^2}{r}$$

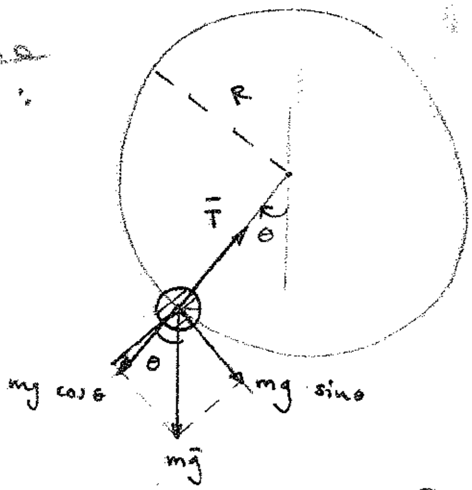
$$\Rightarrow n_{top} = m\frac{v^2}{r} - mg =$$

$$= mg\left[\frac{v^2}{rg} - 1\right] = 0{,}911\, mg$$

---

ex.

Den roterande bollen igen:



tangentiell led:

$$\Sigma F_t = mg\sin\theta = ma_t$$

$$\Rightarrow a_t = g\sin\theta$$

" $|\bar{v}|$ ändras i tiden $a_t = \frac{dv}{dt}$

radiell led:

$$\Sigma F_r = T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

$$\Rightarrow T = m\left(\frac{v^2}{R} + g\cos\theta\right)$$

gränsfall:

toppen: $\theta = 180°$ $\Rightarrow \cos\theta = -1$

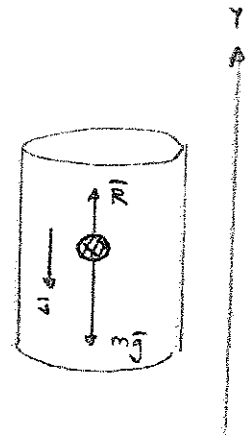
$$\Rightarrow T_{top} = m\left(\frac{v_{top}^2}{R} - g\right)$$

botten: $\theta = 0°$ $\Rightarrow \cos\theta = 1$

$$\Rightarrow T_{bot} = m\left(\frac{v_{bot}^2}{R} + g\right)$$

Rörelse mot viskös kraft

viskös kraft $\bar{R} = -b\bar{v}$



$$\sum F_y = mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g - \frac{b}{m}v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{b}{m}v = g$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt}e^{\frac{b}{m}t} + \frac{b}{m}v\,e^{\frac{b}{m}t} = g\,e^{\frac{b}{m}t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(v\,e^{\frac{b}{m}t}\right) = g\,e^{\frac{b}{m}t}$$

$$\Rightarrow v\,e^{\frac{b}{m}t} = \int_0^t g\,e^{\frac{b}{m}t'}\,dt' \quad \Rightarrow v\cdot e^{\frac{b}{m}t} = g\frac{m}{b}\left(e^{\frac{b}{m}t} - 1\right)$$

$$\therefore \quad v(t) = \frac{gm}{b}\left(1 - e^{-\frac{bt}{m}}\right)$$