

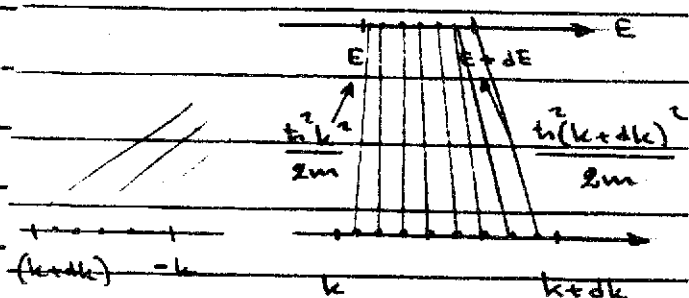
Föreläsning 10.

Frielektronmodellen

Nedanstående resonering avseende tillståndstäthet kan användas på partiklar (gasmolekyler, elektroner mm.) som rör sig under inverkan av en konstant potential (partikel i låda). Dock gäller olika $f(E)$ för olika partiklar.

$$\text{Tillståndstätheten i } k\text{-rummet } N(k) = \begin{cases} \frac{L_x}{\pi} & (1 \text{ dim}) \\ \frac{S}{\pi^2} & (2 \text{ dim}) \\ \frac{V}{\pi^3} & (3 \text{ dim}) \end{cases}$$

Fråga: hur många tillstånd finns det i energiintervallet $[E, E+dE]$

1 dimension:

Observera att prickstätheten skalar om L_x skalar. För lådor med makroskopisk utsträckning är skillnaden mellan två närliggande prickar så liten att den inte kan upptäckas.

antal "prickar" mellan k och $k+dk$ = antal prickar i $[E, E+dE]$

$$k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad \frac{dk}{\frac{\pi}{L_x}} = N(k) \cdot dk = N(E) \cdot dE \quad \Rightarrow N(E) dE = N(k) dk$$

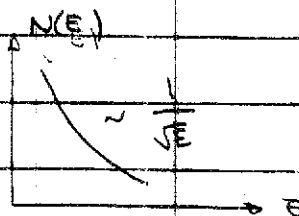
$$E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \quad \Rightarrow dE = \frac{\hbar^2}{m} k \cdot dk \quad \Rightarrow dk = \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{k} \cdot dE =$$

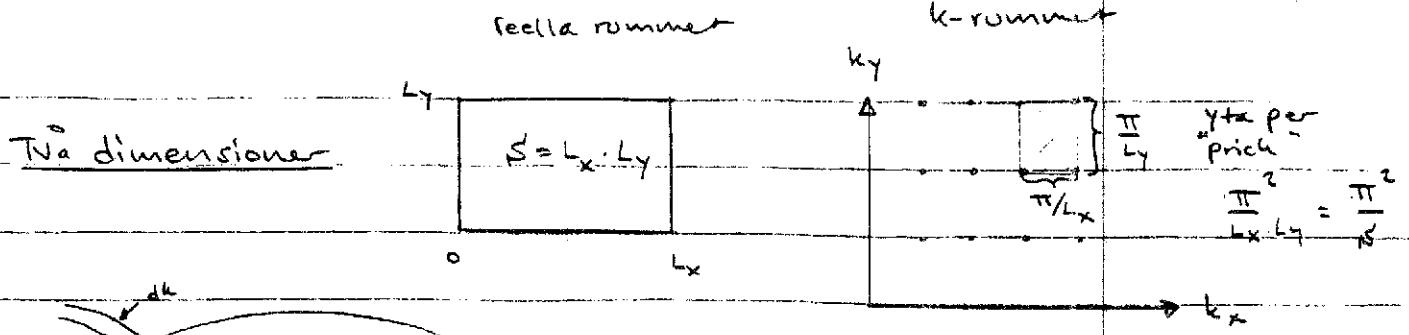
$$= \frac{m}{\hbar^2} \frac{\hbar}{(2mE)^{1/2}} \cdot dE$$

$$\Rightarrow N(k) dk = \frac{L_x}{\pi} \cdot \frac{\hbar}{(2mE)^{1/2}} \cdot \frac{m}{\hbar^2} \cdot dE = \frac{L_x}{\pi} \cdot \frac{m^{1/2} \cdot \pi}{(2mE)^{1/2} \hbar} dE =$$

$$= (2m)^{1/2} \frac{L_x}{\hbar} E^{-1/2} \cdot dE$$

$$\therefore N(E) = (2m)^{1/2} \frac{L_x}{\hbar} E^{-1/2}$$





2D dimensioner

$N(k) \cdot dk = N(E) \cdot dE$

$\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot k \cdot dk = N(E) \cdot dE$

$\frac{\pi^2}{S}$

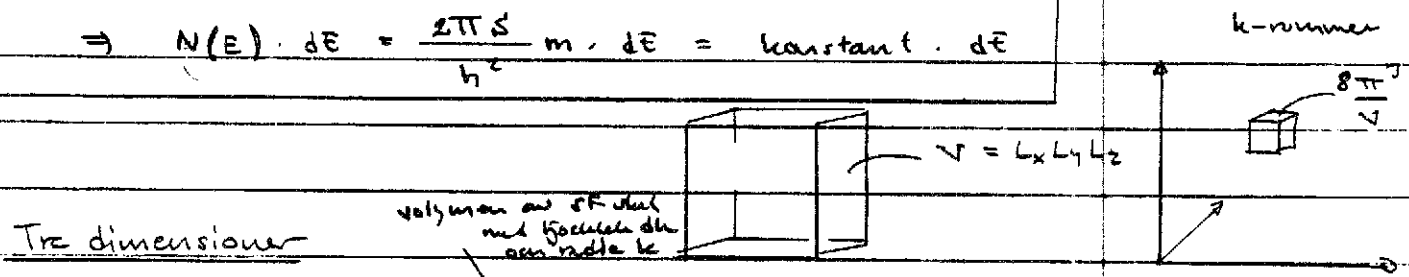
$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow k = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2}, dk = \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{k} \cdot dE$

$\Rightarrow N(E) \cdot dE = \frac{2\pi S}{h^2} m \cdot dE = \text{konstant} \cdot dE$

ytan av en ring med radie k och tjocklek dk

alla tillst. på avst. k fr. origo har samma energi

$N(E)$



3D dimensioner

$g(k)dk = \frac{1}{8} 4\pi k^2 \cdot dk = N(E) \cdot dE$

$\frac{\pi^3}{V}$

$\Rightarrow N(E) dE = V 2\pi \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \cdot E^{1/2} \cdot dE = \text{konst.} \cdot m^{3/2} \cdot E^{1/2} \cdot dE$

$N(E) \sim \sqrt{E}$

Om varje tillstånd har utrymme för X partiklar multipliceras $N(E)$ enl. ovan med X .

ex: elektroner $X=2$ ↑↓

Ideal gas.

Maxwell-Boltzmanns Förd. fun tillämpg.

3 dim.

$$f(E) = C_1 \cdot e^{-E/kT}$$

$$g(E) = C_2 \cdot E^{1/2}$$

$$dN = f(E) \cdot g(E) \cdot dE = \text{antalet partiklar med } E \in [E, E+dE]$$

$$N = \int dN = \int_0^{\infty} g(E) \cdot f(E) \cdot dE = C_1 C_2 \int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

$$\Rightarrow C_1 \cdot C_2 = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}}$$

$$\therefore dN = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE \quad (1)$$

Medelhastigheten $\langle v \rangle$:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v \cdot dN = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v \frac{dN}{dv} \cdot dv$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow dE = m v \cdot dv \quad \text{inrättad i (1) ovan}$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dv} = \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} \left(\frac{m}{2}\right)^{1/2} \cdot v \cdot e^{-\frac{1}{2} m v^2} m v =$$

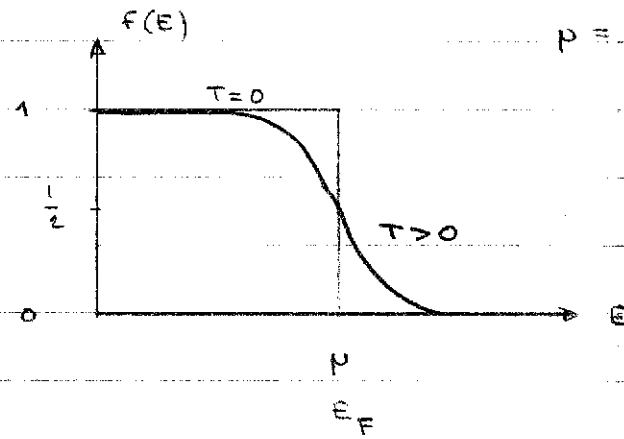
$$= 4\pi N \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{1}{2} m v^2}$$

$$\therefore \langle v \rangle = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \underbrace{\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{1}{2} m v^2} dv}_{\frac{1}{2} (2kT/m)^2}$$

$$\Rightarrow \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

(4)

Elektroner har halvtuligt spin

Fermi-Diracs förd. funktion $\bar{n}$ av särskilt stort intresse: $\mu = \text{fermienergin } E_F$ Antalet partiklar dN som har energier i intervallet $[E, E + dE]$ ges av

$$dN = g(E) \cdot F(E) \cdot dE$$

ex. Fria elektroner

$$V = 1 \text{ m}^3$$

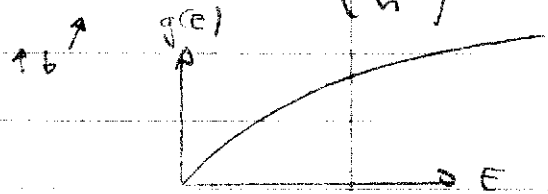
$$N = 1 \cdot 10^{28}$$

el. täthet $1 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$

(typiskt metallvärde)

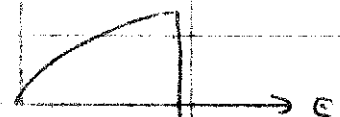
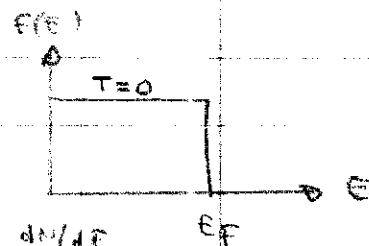
Tre dimensioner

$$g(E) = 2 \cdot V \cdot 2\pi \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} E^{1/2}$$

Hur stor $\bar{n} = E_F$?

$$N = \int_0^\infty dN = \int_0^\infty F(E) g(E) \cdot dE =$$

$$= [T=0] = \int_0^{E_F} g(E) \cdot dE$$

sätt in värden $\Rightarrow E_F = 1,65 \text{ eV}$ Om $T \neq 0$ påverkar värden V el. N .

Medelenergin för partiklar $\langle E \rangle$ 3 dim.

Maxwell-Boltzmann

Fermi-Dirac

T=0

$$\langle E \rangle_{MB} = \frac{U}{N} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot dN}{N} =$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^{\infty} E \cdot \frac{2\pi N}{(\pi kT)^{3/2}} E^{1/2} e^{-E/kT} dE$$

$$\left[x = E/kT \Rightarrow \begin{cases} dE = kT \cdot dx \\ E = x \cdot kT \end{cases} \right]$$

$$= \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} (kT)^{3/2} \cdot kT \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot kT \quad \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{3}{2} kT \quad \text{Hörre 1}$$



ober. av partikel-täthet

$$\langle E \rangle_{FD} = \frac{\int_0^{\infty} E \cdot dN}{\int_0^{\infty} dN} =$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} f(E) \cdot g(E) E dE}{\int_0^{\infty} f(E) \cdot g(E) \cdot dE} = [T=0] =$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} 1 \cdot g(E) \cdot E \cdot dE}{\int_0^{\infty} 1 \cdot g(E) \cdot dE} =$$

$$= \frac{\text{konst} \int_0^{\infty} E^{1/2} \cdot E \cdot dE}{\text{konst} \int_0^{\infty} E^{1/2} \cdot dE} =$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} E^{3/2} \cdot dE}{\int_0^{\infty} E^{1/2} \cdot dE} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} N^{5/2}}{\frac{2}{3} N^{3/2}} = \frac{3}{5} N$$

Fråga: hur stor måste temp. vara för att $\langle E \rangle_{MB} = \langle E \rangle_{FD}$ om $\mu = 3 \text{ eV}$?