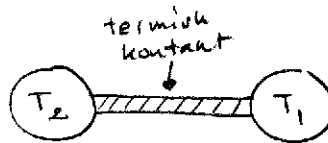


Värmeledning

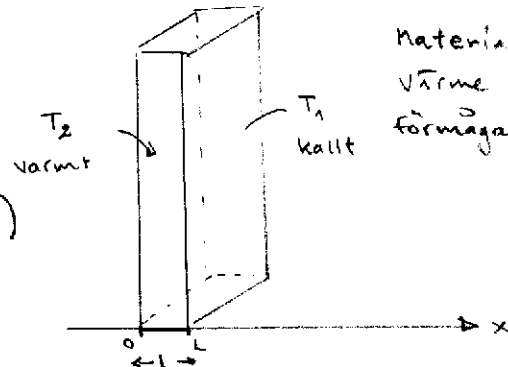
Hur snabbt sker värmeutbyten?

Det beror på temperaturskillnader och egenskaperna (geometri, material) hos den termiska kontakten.

Vi kommer att studera olika enkla geometriska former och även fall där energi genereras i denna kontakt. I alla våra exempel gör vi vårt yttersta för att undvika effekten av betydande randvillkor såsom hörn.

Enklaste fallet:

Ledning genom ett planparallellt passivt block, (Långt från kanterna)



Materialens förmåga att leda värme beskrivs av värmeledningsförmågan λ . Enhet $W/m \cdot K$ (ej millikelvin!)

x-axeln pekar från varmt till kallt!
 $\Rightarrow \frac{dT}{dx} < 0 \Rightarrow$ minustecken

Värmeutbyte per kvadrathet

$$H = \lambda A \frac{T_2 - T_1}{L} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$

Skäl för att exemplet är enkelt:

- i) Den planparallella geometrin gör att temp gradienten är konstant i $[0, L]$
- ii) Mediet som transporterar värme är passivt.

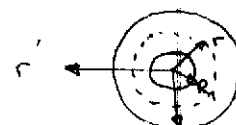
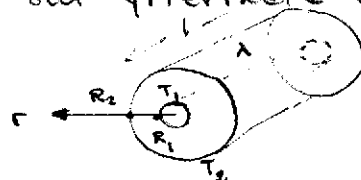
Innan vi går vidare noterar vi bara att det finns andra temperaturutjämnande processer

i) strålning

ii) konvektion

Nästa steg: cylindriskt rör (passivt) vars innerradie hålls vid temperaturen T_1 och yttre radie vid temperaturen T_2

($T_1 > T_2$)



Ug från sidan

Flöde genom den streckade ytan (omkrets $2\pi r$, längd L)

$$H = -\lambda A \frac{dT}{dr} = -\lambda \cdot 2\pi r L \frac{dT}{dr} \Rightarrow H \frac{1}{2\pi L \lambda} \frac{dr}{r} = -dT$$

$$\Rightarrow \frac{H}{2\pi L \lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = - \int_{T_1}^{T_2} dT \Rightarrow \boxed{\frac{H}{2\pi L \lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} = T_1 - T_2}$$

Kinetisk gasteori.

Vad är egentligen temperatur?

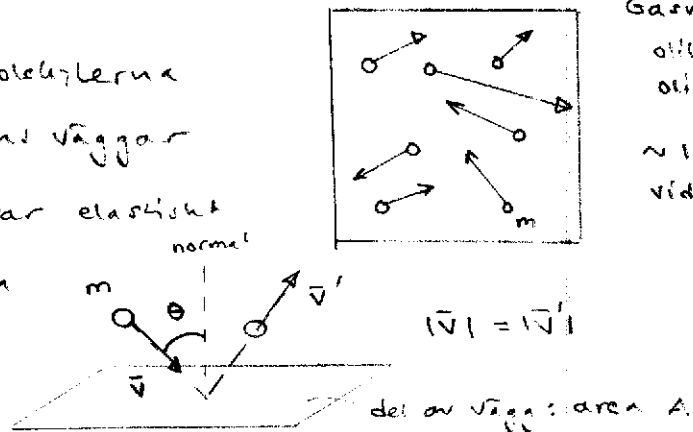
Vi har ju sedan tidigare det experimentella tunna sambandet $pV = nRT$.

Tag nu fram ett mikroskopiskt uttryck för p/T och identifiera temperaturen T !

Tryck uppstår när molekylerna stödsar mot behållarens väggar

En molekyl som stödsar elastiskt normal

mot en av väggarna



Gasmolekyler:
olika hastigheter
olika riktningar
 $\sim 10^{19}$ st per cm^3
vid NTP

Den kraft dF som denna molekyl ger upphov till ges av

$$dF = \frac{\text{förelsmängd} \cdot \text{ändring}}{\text{tidenhet}} = \frac{2(mv \cdot \cos \theta)}{dt}$$

Detta ger ett tryck

$$dp = \frac{dF}{A} = \frac{1}{A} \frac{2mv \cdot \cos \theta}{dt}$$

För att få totaltrycket integrerar vi över alla molekyler som träffar ytan A under tiden dt . Molekylerna som träffar väggen under tiden dt gör det med olika hastigheter och infallsvinklar.

Vi inför funktionen $n(v, \theta) =$ antalet molekyler per volymenhet, hastighetsenhet och vinkelenhet

Hur många molekyler finns det inom volymen ΔV som har hastigheter i $[v, v+dv]$ och som infaller mot vår vägg med infallsvinklar i $[\theta, \theta+d\theta]$?

Ja: $n(v, \theta) dv d\theta \cdot \Delta V$ stycken.

Steg i beräkningen:

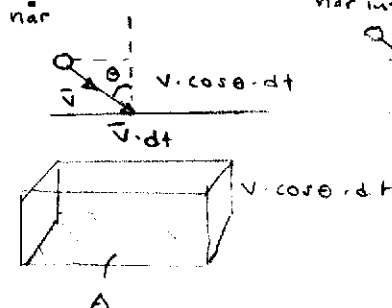
1. Fixera v och θ !
2. Hur många molekyler när vår vägg under dt ?
3. Bestäm deras sammanlagda rörelsemängdsändring!
4. Samband mellan $n(v, \theta)$ och $n(v)$
5. Bestäm tryckbidraget från v, θ -molekylerna
6. Bestäm trycket från samtliga molekyler.

1) Vi ser nu bara de molekyler med v i $[v, v+dv]$ och θ i $[\theta, \theta+d\theta]$

2) Antal.

De molekyler som vid tiden t ligger tillräckligt nära väggen när fram till den inom $t+dt$.

Alla molekyler som befinner sig inom volymen $v \cdot \cos \theta \cdot dt \cdot A$ när fram under $[t, t+dt]$



$\therefore$ Stötantalet $n(v, \theta) dv d\theta (v \cdot \cos \theta \cdot dt) \cdot A$

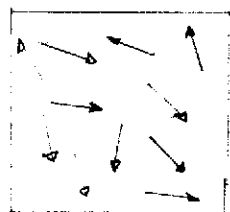
ändring/molekyl

3) Rörelsemängdsändring = stötantalet $\cdot 2mv \cdot \cos \theta$

4) Samband mellan $n(v, \theta)$ och $n(v)$

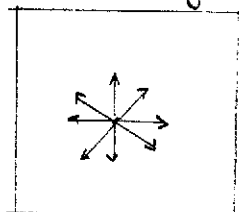
Hur stor brädel av de molekyler som kommer in mot ytan A med hastighet i $[v, v+dv]$ träffar den med en vinkel mot normalen som ligger i $[\theta, \theta+d\theta]$?

$v \in [v, v+dv]$



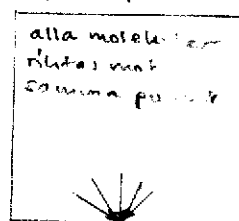
alla vinklar

omfördelning



Vinkelfördeln
isotrop
lika stora egen-
skaper i alla
riktningar
OBS! inte bara
i pappersplanet.

ny omfördelning

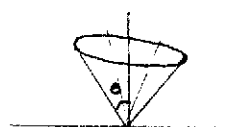


endast
retätta
molekyler
med taget

Nu grupperar vi molekylerna efter olika värden på θ .

Tänk på att problemet är tredimensionellt!

De molekyler som infaller med samma vinkel definierar en kon.



liten vinkel



stor vinkel

Antalet molekyler som infaller med $\theta \in [\theta, \theta + d\theta]$ är proportionellt mot ytan av ett fönster enligt figuren nedan. Fönstrets (stråhat) yta:

$$dA = 2\pi (v \cdot \sin\theta) \cdot (v d\theta) = 2\pi v^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

Just dessa molekylers antal jämfört med

totala antalet molekyler med samma hastighet ges av förhållandet mellan dA och ytan av en sfär med radie v

$$\frac{dA}{4\pi v^2} = \frac{2\pi v^2 \cdot \sin\theta \cdot d\theta}{4\pi v^2} = \frac{1}{2} \sin\theta \cdot d\theta = \frac{n(v, \theta) dv \cdot d\theta}{n(v) \cdot dv}$$

5) Tryckbidraget från molekyler med $v \in [v, v+dv]$ och $\theta \in [\theta, \theta+d\theta]$:

$$\begin{aligned} \text{stötantalet} &= n(v, \theta) dv d\theta v \cdot \cos\theta dt \cdot A = \\ &= \frac{1}{2} \sin\theta \cdot d\theta n(v) dv v \cdot \cos\theta dt \cdot A \end{aligned}$$

$$P = \frac{dF}{dt} \frac{1}{A}$$

$$dP_{v, \theta} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sin\theta \cdot d\theta \cdot n(v) dv \cdot v \cdot \cos\theta \cdot dt \cdot A \right) (2mv \cdot \cos\theta)}{A \cdot dt}$$

$$= n(v) \cdot dv \cdot mv^2 \cos^2\theta \cdot \sin\theta \cdot d\theta$$

Integrera över alla infallsvinklar och erhåll bidraget till trycket från "v-molekylerna"

$$dP_v = n(v) dv \cdot mv^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot \sin\theta d\theta = \frac{1}{3} n(v) dv \cdot mv^2$$

6. Totala trycket

$$\begin{aligned}
 p &= \int_0^{\infty} \frac{1}{3} n(v) \cdot mv^2 \cdot dv = \frac{2}{3} \int_0^{\infty} n(v) \cdot \frac{1}{2} mv^2 dv = \\
 &= \frac{2}{3} E_{\text{kinetisk}} \text{ per volymenhet}
 \end{aligned}$$

$\circ$ molekylernas sammanlagda kinetiska (translations) energi

eller

$$p = \frac{2}{3} \frac{N}{V} E_{\text{kin, ave}} \Rightarrow pV = \frac{2}{3} E_{\text{kin, ave}}$$

kombinera detta med $pV = n'RT$!

$$\Rightarrow E_{\text{kin, ave}} = \frac{3}{2} \frac{R}{N/n'} T = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} kT$$

$$\therefore \boxed{\text{Medelvärdet av molekylernas kinetiska translationsenergi} = \frac{3}{2} kT}$$

Translation innebär rörelse utefter x, y, z -axlarna
dvs 3 frihetsgrader

$\therefore \frac{1}{2} kT = \text{medelenergin per frihetsgrad.}$

I de fall där molekylerna har ena strukturer (ex O_2)
och andra rörelser såsom rotation och vibration
konkurrerar om den tillgängliga energin kommer vi
att utveckla detta.

Därav skillnader i specifikt värme mellan en- och
tvåatomiga molekyler.

Stöttalet n^*

När vi gjorde tryckberäkningen behövde vi reda ut dels hur många molekyler som träffar en viss yta per tidsenhet och vid riktningändringen blir för detta.

I många sammanhang (kemiska reaktioner, läckage mm) är man bara intresserad av hur många molekyler som träffar en viss yta per ytenhet och tidsenhet $= n^*$

$$n^* = \frac{\int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} n(v, \theta) v \cdot \cos \theta \cdot dt \cdot A \cdot dv d\theta}{dt \cdot A} =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin \theta \cdot \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} n(v) v \cdot dv = \frac{1}{4} n\langle v \rangle$$

medelhastigheten

n^* anger antalet stötar per ytenhet och tidsenhet

Enhet: $m^{-2} s^{-1}$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{mol}}}$$

$$= \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_{molekyl}}}$$

detta visas i slutet av kursen

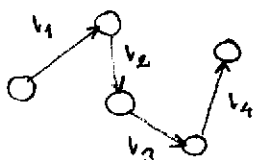
ex. $T = 273 K$

$$\Rightarrow \langle v \rangle_{O_2} = 400 \text{ m/s}$$

$$\langle v \rangle_{H_2} = 1700 \text{ m/s}$$

Medelfri väg

I en ideal gas saknar molekylerna utsträckning vilket gör att de inte kan kollidera med varandra. Vid NTP är molekylernas utsträckning av samma storleksordning som avståndet mellan molekylerna i gasen. Molekyl-molekyllkollisioner är således mycket frekventa.

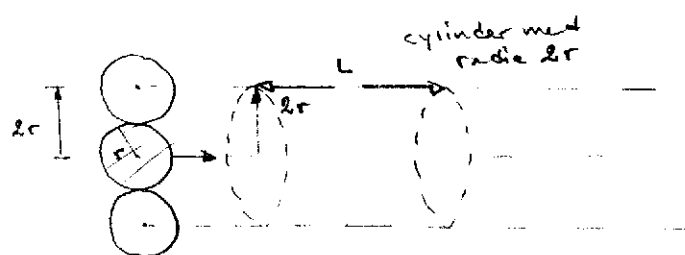


l_i = sträcka mellan kollisioner.

$$L \equiv \sum_i l_i$$

Hur många gånger kolliderar en molekyl när den färdats sträckan L ?

Detta är relativt svårt att räkna ut men om vi gör förenklingen att "vår" molekyl är den enda som rör sig och alla andra sitter helt stilla och väntar på att bli krockade så blir det enkelt. Alla molekyler är lika stora, radii $= r \Rightarrow$ diameter $2r$.



När vår molekyl färdas sträckan L krockar den alla molekyler vars centra befunnit sig inom volymen

$$\pi (2r)^2 \cdot L$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{antalet krockar} &= (\text{molekyltätthet}) \cdot (\pi (2r)^2 \cdot L) = \\ &= \frac{N}{V} \pi (2r)^2 \cdot L \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ sträcka mellan kollisioner i medeltal = medelfri väg $l =$

$$= \frac{L}{\frac{N}{V} \pi (2r)^2 \cdot L} = \frac{1}{\frac{N}{V} \pi (2r)^2}$$

Om vi hade utfört den mer förstådiga härledningen där alla molekyler rör sig hade vi fått en faktor $\sqrt{2}$ i nämnaren

$$\therefore l = \frac{1}{\frac{N}{V} \pi (2r)^2 \sqrt{2}}$$