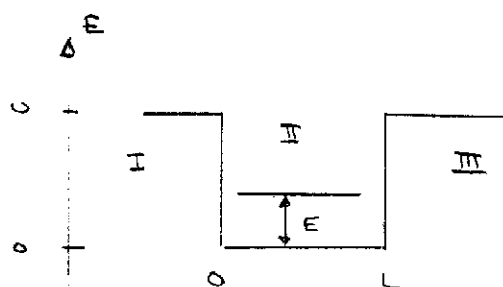


Föreläsning 7.

Partikel i låda vars väggar är ändligt höga.



Vi studerar bundna tillstånd
dvs $E < U$.

I de klassiskt förbjudna områdena I och II har
enr. enw. följande utseende

$$U > E \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} = \kappa^2 \psi \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2} \psi$$

$$\kappa^2 = \frac{2m(U-E)}{\hbar^2}$$

$$\psi = A e^{\kappa x} + B e^{-\kappa x}$$

A och B konst.

ψ ska vara kontinuerlig, och dessutom:

ψ måste vara ändlig överallt, $\Rightarrow B=0$ i område I

$A=0$ i område III

Detta ger:

$$\psi_I = A e^{\kappa x} \quad x < 0$$

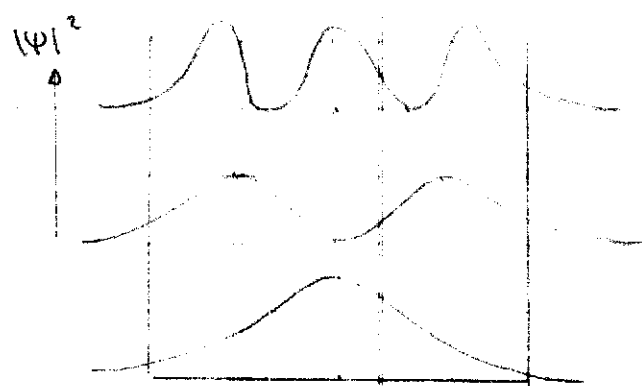
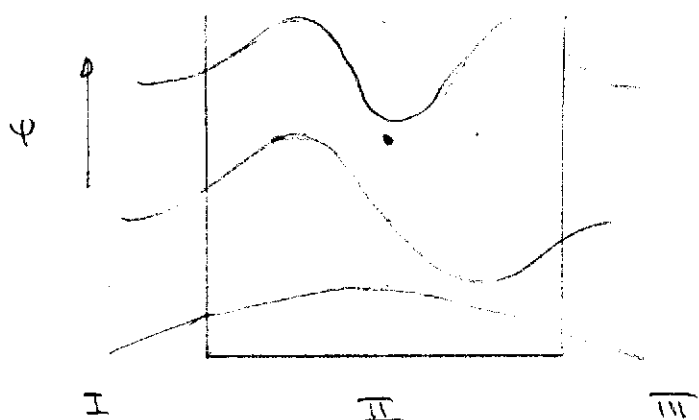
$$\psi_{III} = B e^{-\kappa x} \quad x > L$$

Vågfunktionen avbryts
exponentiellt utanför
lådorna.

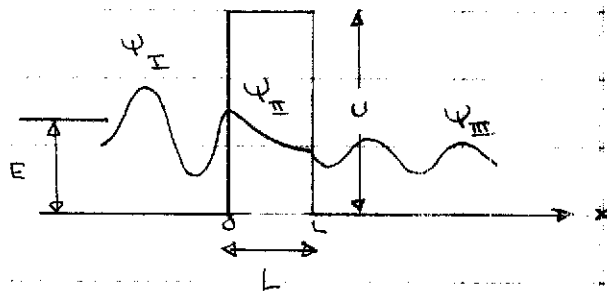
$0 < x < L$:

$$\psi_{II} = F \sin(kx) + G \cos(kx)$$

F och G är konstanter.



Krav: även $\frac{d\psi}{dx}$ måste vara
kontinuerlig.

Tunneleffekten.

Klassiskt kan inga partiklar med $E < U$ penetrera
barriären men i kvantmekaniken är alla områden
tillgängliga för partikeln.

krav $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad , \quad \frac{d\psi_I(0)}{dx} = \frac{d\psi_{II}(0)}{dx}$

$\psi_{II}(L) = \psi_{III}(L) \quad , \quad \frac{d\psi_{II}(L)}{dx} = \frac{d\psi_{III}(L)}{dx}$

ψ måste vara ändlig överallt.

Vågfunktionen i såväl område I som II består
av våg från vänster till höger samt en våg från
höger till vänster

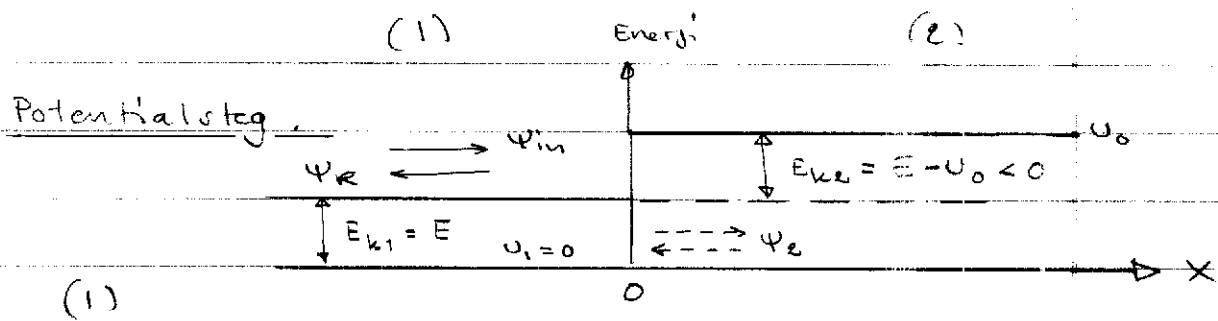
I område III består vågfunktionen endast av en
våg från vänster till höger (ingen bunn som reflekterar
vågen mot vänster om den väl kommit in i omr. III)

T = andel partiklar av de som sänds in mot
barriären som tar sig igenom

$$T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{k_1}{K} + \frac{K}{k_1} \right) \cdot \frac{1}{2} (e^{KL} - e^{-KL})^2}$$

$k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$
 $K = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$

i fallet då $T \ll 1$ (hög och bred barriär) gäller $T \approx e^{-2KL}$



Infällande våg: $\psi_{in} = A e^{jk_1 x}$

Ref. våg: $\psi_R = B e^{-jk_1 x}$

Om r. (2)

$$\psi_2 = C \cdot e^{jk_2 x} + D e^{-jk_2 x}$$

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{(\hbar k)^2}{2m} \rightarrow k = \frac{\sqrt{2m E_k}}{\hbar}$$

$$x \leq 0 : k_1 = \frac{\sqrt{2m E}}{\hbar}$$

$$x \geq 0 : k_2 = \frac{\sqrt{2m E_{k2}}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m (E - u_0)}}{\hbar} \quad \because k_2 \text{ imaginärt}$$

$$\text{skriv om } k_2 = j \frac{\sqrt{2m (u_0 - E)}}{\hbar} = j k'$$

$$\Rightarrow \psi_2 = C e^{j(jk') \cdot x} + D e^{-j(jk') \cdot x} =$$

$$= C e^{-k' \cdot x} + D \cdot e^{+k' \cdot x}$$

$$D=0 \quad \text{annars går } D \cdot e^{k' \cdot x} \text{ mot } \infty \text{ då } x \rightarrow \infty$$

$$(1) \quad \Psi_1 = A \cdot e^{jk_1 x} + B \cdot e^{-jk_1 x}$$

$$(2) \quad \Psi_2 = C \cdot e^{-k' x}$$

Ψ och $\frac{d\Psi}{dx}$ kontinuerliga vid $x=0$ (och överallt)

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \Rightarrow A + B = C$$

$$\left(\frac{d\Psi_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\Psi_2}{dx}\right)_{x=0} \Rightarrow jk_1 A - jk_1 B = -k' C$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A - B = j \frac{k'}{k_1} C \\ A + B = C \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{1 - j \frac{k'}{k_1}}{1 + j \frac{k'}{k_1}}$$

Intensiteten hos partikelflödet : strömstäthet $J = -e v$
 $= -e |\Psi|^2 \cdot \frac{\hbar k}{m}$

$$I = |\Psi|^2 \frac{\hbar k}{m} = \Psi^* \Psi \frac{\hbar k}{m}$$

$$R \equiv \frac{I_R}{I_{IN}} = \frac{\Psi_R^* \Psi_R \frac{\hbar k_1}{m}}{\Psi_{IN}^* \Psi_{IN} \frac{\hbar k_1}{m}} = \frac{\Psi_R^* \Psi_R}{\Psi_{IN}^* \Psi_{IN}} = \frac{B^* e^{jk_1 x} \cdot B e^{-jk_1 x}}{A^* e^{jk_1 x} \cdot A e^{-jk_1 x}} =$$

$$= \frac{B^* B}{A^* A} = \left(\frac{B}{A}\right)^* \left(\frac{B}{A}\right) = \left(\frac{1 + j \frac{k'}{k_1}}{1 - j \frac{k'}{k_1}}\right) \left(\frac{1 - j \frac{k'}{k_1}}{1 + j \frac{k'}{k_1}}\right) = 1$$

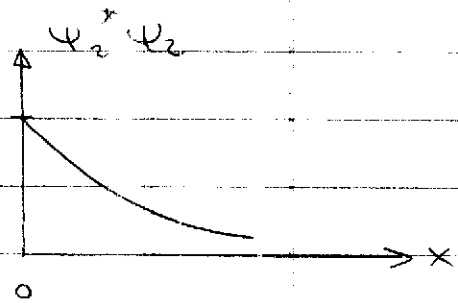
$\therefore$ hela elektronströmmen reflekteras väntat.

I området $x \geq 0$ (kinet. energi negativ)

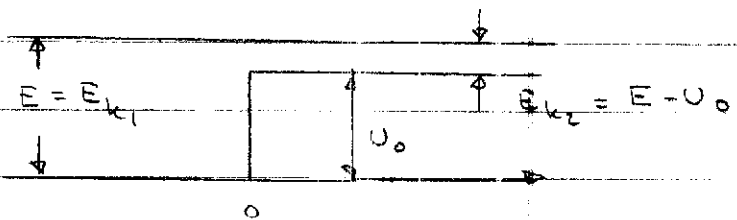
$$C = \frac{2A}{1 + j \frac{k'}{k_1}} \Rightarrow \psi_2 = \frac{2A}{1 + j \frac{k'}{k_1}} e^{-k'x}$$

partikeldensitet $n_2 = \psi_2^* \psi_2 = \frac{4A^2}{\left(1 - j \frac{k'}{k_1}\right) \left(1 + j \frac{k'}{k_1}\right)} e^{-2k'x}$

$$= \frac{4A^2}{1 + \left(\frac{k'}{k_1}\right)^2} e^{-2k'x}$$



Nästa exempel:



$$\psi_1 = A \cdot e^{jk_1 x} + B \cdot e^{-jk_1 x}$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\psi_2 = C \cdot e^{jk_2 x} + D \cdot e^{-jk_2 x}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$$

ψ och $\frac{d\psi}{dx}$ kontinuerliga ger

$$R = \frac{I_R}{I_{IN}} = \frac{B^2}{A^2} = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \right)^2$$

$$T = \frac{I_T}{I_{IN}} = \frac{C^2 k_2}{A^2 k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$R + T = 1 \quad \text{VISA!}$$