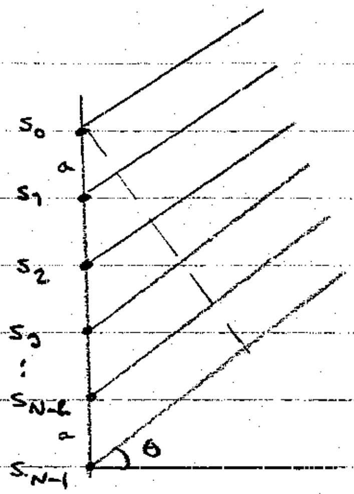
Flera synkrona källor. (gitter)



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}\, a \cdot \sin\theta$$

N källor

komplexa störningen vid den streckade linjen

Matematiken blir förenklad om vi räknar med en komplex störning. Amplituden svarar mot Im z,

$$z_0 = A \cdot e^{j\omega t}$$

$$z_1 = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)}$$

$$z_2 = A \cdot e^{j(\omega t + 2\delta)}$$

$$\vdots$$

$$z_{N-1} = A \cdot e^{j[\omega t + (N-1)\delta]}$$

geometrisk serie: kvot $e^{j\delta}$ N termer

$$\left(\frac{1-k^N}{1-k}\right)$$

$$Z_{tot} = A' \cdot e^{j\phi} e^{j\omega t}$$

där $A' e^{j\phi} = A\left(1 + e^{j\delta} + e^{j2\delta} + \ldots + e^{j(N-1)\delta}\right)$

$$= A \,\frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}}$$

$$I \sim (\text{ampl.})^2 \quad \Rightarrow \quad I \sim |A e^{j\phi}|^2 =$$

$$= A^2 \frac{(1-e^{jN\delta})(1-e^{-jN\delta})}{(1-e^{j\delta})(1-e^{-j\delta})} = A^2 \frac{1-\cos N\delta}{1-\cos\delta} =$$

$$= \left[\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\right] =$$

$$= A^2 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

δ beror bl.a. av riktningen θ !

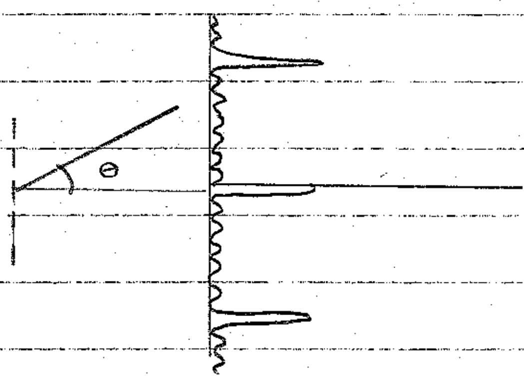
Extremvärden

1) $a \cdot \sin\theta = 0$ "rakt fram" $\theta = 0$

$$\theta \to 0 \Rightarrow \delta \to 0 \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = N^2$$

två varianter:

$$I_\theta = \begin{cases} I_0' \dfrac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} \\ I_0 \dfrac{\sin^2 N\frac{\delta}{2}}{N^2 \cdot \sin^2\frac{\delta}{2}} \end{cases}$$



I_0' = intensiteten från en källa (rakt fram)

I_0 = int. från hela uppsättningen N källor rakt fram.

2) **maximum** då $\frac{\delta}{2} = 0, \pi, 2\pi$ (N^2)

dvs då $a \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$

både täljare och nämnare är noll!

3) **minima**: variera $\theta \Rightarrow \delta$ varierar

(har nollställen oft

täljaren ($\sin N\frac{\delta}{2}$) varierar N ggr så fort som nämnaren ($\sin\frac{\delta}{2}$).

Minima då

$$\sin\left(N\frac{\delta}{2}\right) = 0 \Rightarrow N\frac{\delta}{2} = p \cdot \pi \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{p}{N}\pi$$

men $\frac{p}{N} \neq$ heltal ty då är $\frac{\delta}{2} = n \cdot \pi$ och det var ju villkoret för max. både tälj. och nämn = 0.

$\boxed{p \neq n \cdot N}$

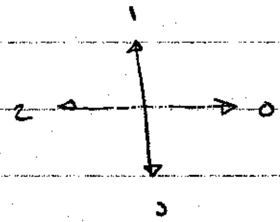
dvs minima när $\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot a \sin\theta = \frac{p}{N}\pi$

$$\Rightarrow a \cdot \sin\theta = \frac{p}{N} \cdot \lambda$$

dvs $a \cdot \sin\theta = \frac{1}{N}\lambda, \frac{2}{N}\lambda, \ldots, \frac{N-1}{N}\lambda, -, \frac{N+1}{N}\lambda, \ldots$

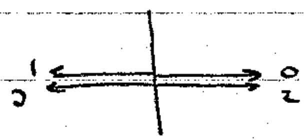
ex. 4 spalter (0,1,2,3)   min. villkor $a \cdot \sin\theta = \frac{p}{4}$ $p \neq n \cdot 4$

i) $a \cdot \sin\theta = \frac{1}{4}\lambda$



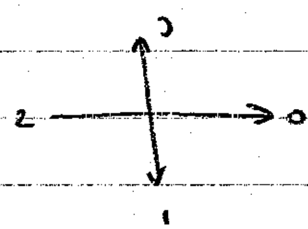
$\Sigma = 0$ min

ii) $a \cdot \sin\theta = \frac{2}{4}\lambda$



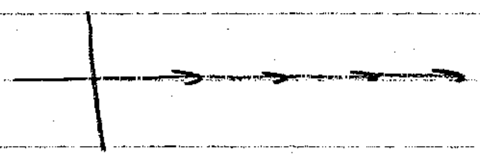
$\Sigma = 0$

iii) $a \cdot \sin\theta = \frac{3}{4}\lambda$



$\Sigma = 0$

iv) $a \cdot \sin\theta = \frac{4}{4}\lambda = \lambda$



max.

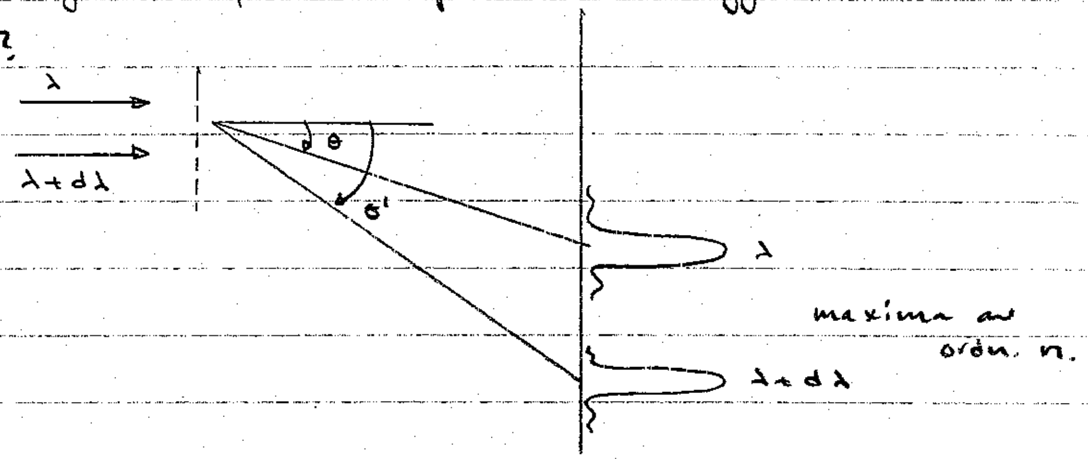
Mellan två huvudmax.: $N-1$ minima

$N-2$ sek. maxima

Gittrets upplösningsförmåga : $a \cdot \sin\theta = n\lambda$

ju större λ desto större θ !

Hur bra är gittret på att separera närliggande våglängder ?



Hur stort är $d\lambda$ när vågl. $(\lambda + d\lambda)$ har maximum vid samma vinkel θ' där vågl. λ har minimum (närmast principalmax) ?

λ: max då $a \sin\theta = n\lambda$

min $a \cdot \sin\theta' = \frac{n \cdot N + 1}{N} \lambda$

$\lambda + d\lambda$: max $a \cdot \sin\theta' = n(\lambda + d\lambda)$

$$\Rightarrow \frac{nN+1}{N}\lambda = n(\lambda + d\lambda) \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{\lambda}{nN}$$

eller $\boxed{\frac{\lambda}{d\lambda} = nN}$

allm. regel : ju fler vågor som interfererar desto smalare maxima.

ex. $\lambda = 5000$ Å

$d\lambda = 1$ Å

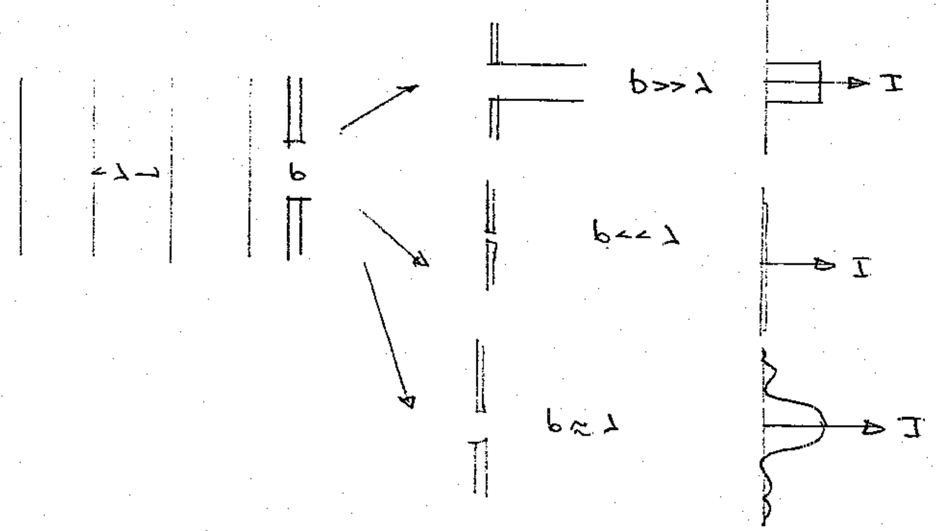
$n = 1$ $\Rightarrow \frac{\lambda}{d\lambda} = 5000 \quad \therefore \quad N = 5000$

dvs ett gitter med 5000 ritsar krävs för upplösn.

Böjning – diffraktion

Huygens princip: varje punkt på en vågfront utgör en källa för en sfärisk våg

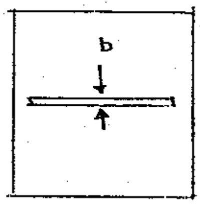
⇒ en plan våg fortsätter att vara plan om dess utsträckning (i sidled) inte begränsas.

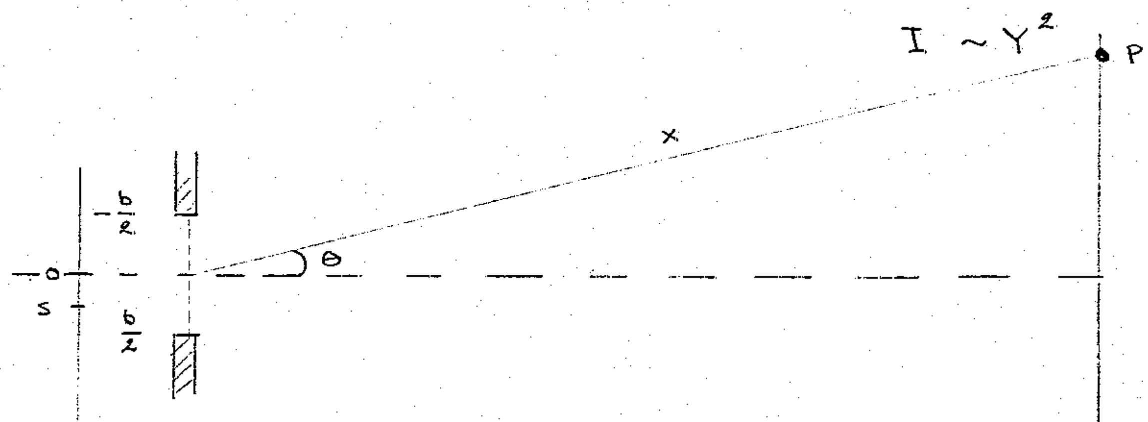


Långt ifrån ljuskälla/hinder kan vågorna anses vara plana.

Vi kommer att anta att så är fallet. Vi studerar specialfallet Fraunhoferdiffraktion: plan våg in & plan våg ut

Böjning i en spalt.





Spalten består av små längdelement ds som "strålar"

Beräkna resulterande störning i P!

Bidrag till störningen från ds i mitten av spalten $(s=0)$

$$0: \quad dy_0 = a \cdot ds \cdot \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Bidrag från ds på avståndet s från spaltcentrum

$$s: \quad dy_s = a \cdot ds \cdot \sin\left[\omega t - \left(2\pi \frac{x}{\lambda} + 2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda}\right)\right]$$

Hela spalten

$$Y = \int_{-b/2}^{b/2} dy_s$$

Knep: addera först parvis symmetriskt belägna spaltelement

$$dy = dy_s + dy_{-s} = a \cdot ds \left\{ \sin\left[\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda}\right] + \right.$$

$$\left. + \sin\left[\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi \frac{s \sin\theta}{\lambda}\right] \right\} =$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$$

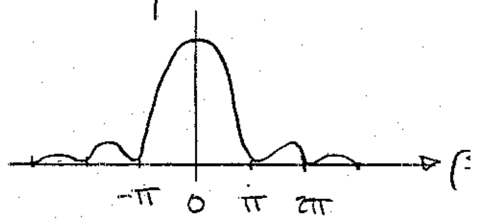
$$= 2a \cdot ds \, \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \int_0^{b/2} \cos 2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda} \, ds =$$

$$= a \cdot b \, \frac{\sin \frac{\pi b \sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi b \cdot \sin\theta}{\lambda}} \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Sätt $a \cdot b = A_0$ och $\beta = \dfrac{\pi b \cdot \sin\theta}{\lambda}$

Vi har en θ-beroende amplitud : $A = A_0 \dfrac{\sin\beta}{\beta}$

$$\Rightarrow I_\theta \sim A_0^2 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$



1) Rakt fram: $\theta = 0$

$\theta \to 0 \Rightarrow \beta \to 0$ $\qquad \lim_{\beta \to 0} \dfrac{\sin\beta}{\beta} = 1$

I rakt fram $= I_0 =$ maximum

$$\therefore I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$

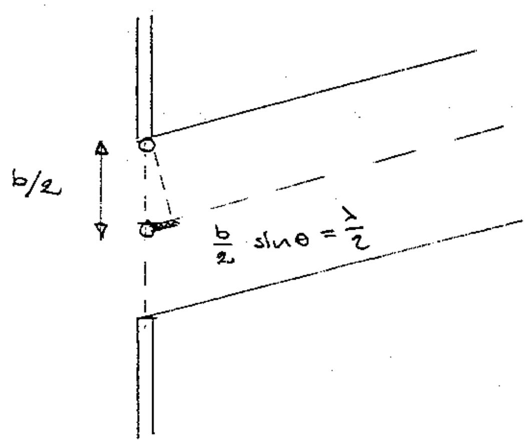
2) nollställen : $\beta = m\pi$ men $m \neq 0$

$\Downarrow$

$\sin\beta = 0$

ex $\beta = \pi \Rightarrow b \cdot \sin\theta = \lambda$

$\Rightarrow \dfrac{b}{2} \cdot \sin\theta = \dfrac{\lambda}{2}$



3) <u>sekundärmaxima</u>

$$\frac{dI}{d\beta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2 \cdot 2 \cdot \sin\beta\cos\beta - \sin^2\beta \cdot 2\beta}{\beta^4} = 0$$

$$\Rightarrow \tan\beta - \beta = 0$$ löses grafiskt.

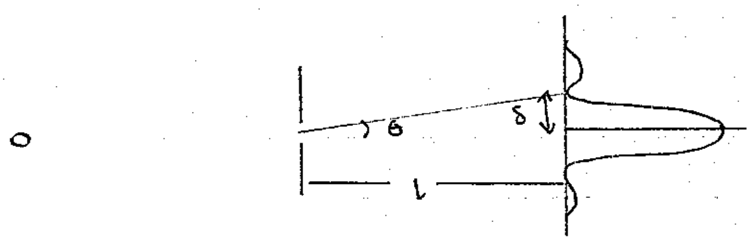
approximativt: $b \cdot \sin\theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$

$m = 1$: $b \sin\theta = 3\frac{\lambda}{2}$

$m = 2$: $b \cdot \sin\theta = 5\frac{\lambda}{2}$

Upplösningsförmåga

Betrakta ett föremål t.ex en stjärna på långt avstånd genom en spalt



stort b ger liten bildfläck

1:a min $\quad \left.\begin{array}{l} b \cdot \sin\theta = \lambda \\ \sin\theta \approx \frac{\delta}{l} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \frac{\lambda}{b} \cdot l$

rund öppning: diameter D

$$\delta' = 1{,}22 \frac{\lambda}{D} \cdot l$$

Avbildning i fokalplanet ($l = f$)
Plana vågor $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \delta' = 1{,}22 \frac{\lambda}{D} \cdot f$$

Två föremål är knappt upplösta om deras diffr. mönster är sådana att den enas principalmax. sammanfaller med den andras 1:a min Rayleighs kriterium