

Rotation av stel kropp runt fix axel.

Nu ska vi studera rörelser hos system av partiklar som har egenskapen att de bildar helt stela (otöjbara och oböjbara) kroppar. Det finns naturligtvis inte några sådana kroppar i verkligheten, men i många fall är detta en tillräckligt god approximation. När det gäller rotationsrörelser begränsar vi oss till sådana där rotationsaxeln är riktad åt samma håll hela tiden. Utvidgningen av det som vi har studerat hittills till stora system innebär inte att vi överger Newtons lagar. De är bara förpackade på ett nytt sätt så att beräkningarna blir enklare att utföra.

En stel kropps rörelse (exempelvis en metallcylinder som rullar på ett horisontellt bord) kan delas in i två delar; dels tyngdpunktens translationsrörelse (en prick som rör sig) och dels rotationsrörelsen runt tyngdpunkten. En viss kropp som rullar fram har en rörelseenergi som är större än den rörelseenergi som den hade haft om den hade glidit fram med samma fart och större än den rörelseenergi som de hade haft om den bara hade snurrat runt utan att röra sig framåt. Den totala rörelseenergin är summan av translationsenergin och rotationsenergin.

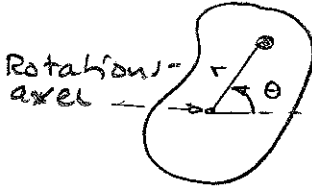
Vi börjar med att studera rena rotationsrörelser, såsom rörelsen hos ett hjul som vi håller upp i luften och får att rotera på något sätt.

För denna rörelse är vinkel θ , vinkelhastighet ω , och vinkelacceleration α , viktiga storheter.



θ i radianer

$\Rightarrow \frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} \equiv r\omega$
 $\alpha \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$



Rotationsaxel

För en viss partikel är avståndet r till rot-axeln konstant.

Relationerna mellan θ , ω och α är desamma som mellan x , v och a i partikelmekaniken. Därför "överlever" alla gamla samband och vi bara byter ut x mot θ , v mot ω och a mot α .

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 + at \longrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \\
 x &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \longrightarrow \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\
 v^2 &= v_0^2 + 2a(x - x_0) \longrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)
 \end{aligned}$$

Dessutom:

$$\begin{aligned}
 v &= \omega r \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a_\theta = \frac{d\omega}{dt} r \text{ eller } a_\theta = \alpha r \\
 a_r &= \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = r\omega^2 \\
 \bar{a} &= \bar{a}_\theta + \bar{a}_r \quad a = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}
 \end{aligned}$$

Rotationsenergi:

Betrakta en tvådimensionell kropp som roterar runt en fix axel.

För de enskilda partiklarna som kroppen består av gäller:

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (\text{rotationsenergin})$$

För hela kroppen gäller då:

$$K_R = \sum K_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad \text{eller} \quad \int \frac{1}{2} v_i^2 dm$$

hela kroppen

Eftersom alla partiklar roterar med samma vinkelhastighet ω , gäller:

$$v_i = \omega r_i \Rightarrow K_R = \int \frac{1}{2} (\omega r_i)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r_i^2 dm$$

h.k. h.k.

Vi definierar nu begreppet tröghetsmoment I enligt:

$$I \equiv \int r_i^2 dm$$

När systemet som vi studerar består av ett ändligt antal masselement övergår integralen till en summa:

$$I = \sum_i r_i^2 m_i$$

Rotationsenergin kan nu skrivas:

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \left[\text{ifr. } K = \frac{1}{2} m v^2 \right]$$

Observera att en och samma kropp kan ha oändligt många olika tröghetsmomentet, eftersom detta beror på rotationsaxelns placering. Tröghetsmomentet för en rad kroppar med avseende på rotation kring högsymmetriska axlar finns i de flesta fysikaliska tabeller.

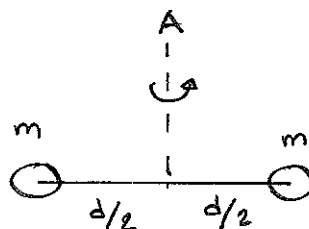
I den här delen av kursen kommer vi att stöta på flera storheter som har "efternamnet" moment (tröghetsmoment, vridande moment och rörelsemängdsmoment). I samtliga fall beror storheten av rotationsaxelns placering.

Vi ska nu träna oss på att räkna ut tröghetsmoment för några enkla fall:

Exempel 10.2
Syremolekylen

$$d = 1,21 \text{ \AA}$$

$$m = 2,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$



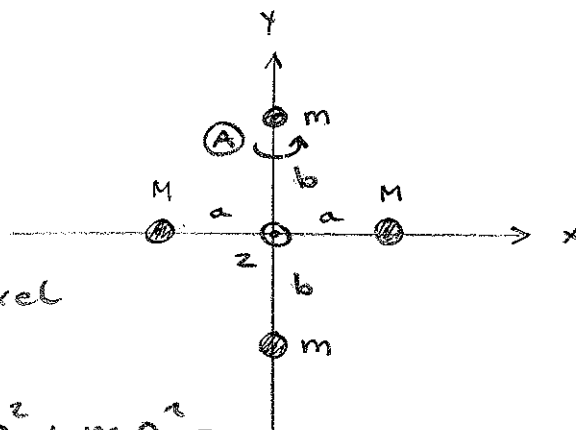
$$I_A = m \left(\frac{d}{2} \right)^2 + m \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{m d^2}{2} = 1,95 \cdot 10^{-46} \text{ kg m}^2$$

med $\omega = 4,60 \cdot 10^{12} \text{ rad/s}$ får vi

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 1,95 \cdot 10^{-46} \cdot (4,60 \cdot 10^{12})^2 \text{ J} = 2,06 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

Exempel 10.3

Fyra roterande små sfärer



(A) y-axeln rotationsaxel

$$I_y = Ma^2 + Ma^2 + m \cdot 0^2 + m \cdot 0^2 =$$

$$= 2Ma^2$$

$$K_R = \frac{1}{2} \omega \cdot I_y = \frac{1}{2} \omega 2Ma^2 = \underline{\underline{Ma^2 \omega}}$$

(B) z-axeln rotationsaxeln

$$I_z = Ma^2 + Ma^2 + mb^2 + mb^2 = 2Ma^2 + 2mb^2$$

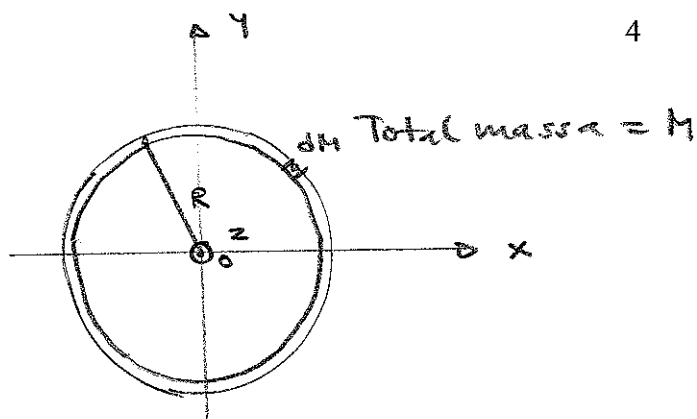
$$K_R = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} (2Ma^2 + 2mb^2) \omega^2 =$$

$$= \underline{\underline{(Ma^2 + mb^2) \omega^2}}$$

Tunn ring

homogen tunn ring

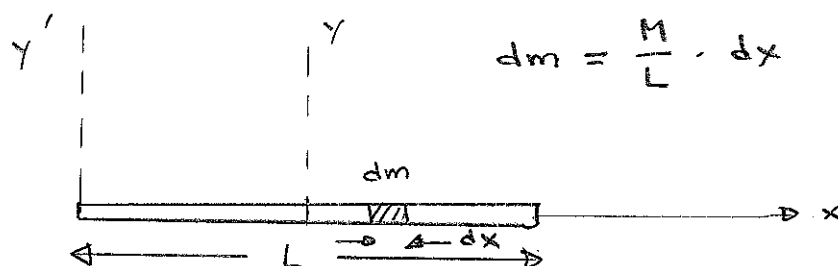
z-axeln rotationsaxel



$$I_z = \int r^2 dm =$$

$$= R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Jämntjock stav



$$dm = \frac{M}{L} \cdot dx$$

y : rotation runt axel genom mittpunkten

$$I_y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L} dx =$$

$$= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1M}{3L} \left[\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{M}{L} \frac{2L^3}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

y' : rotation runt axel genom en av ändarna

$$I_{y'} = \int r^2 dm = \int_0^L x^2 dm = \frac{M}{L} \int_0^L x^2 dx =$$

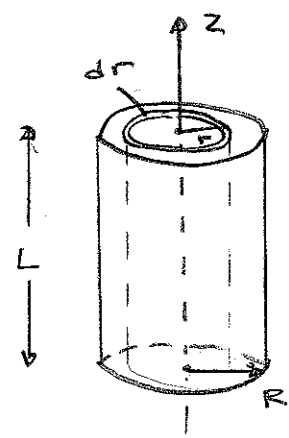
$$= \frac{M}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{M}{L} \frac{1}{3} L^3 = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

$$\therefore I_{y'} = 4 I_y$$

Exempel 10.4
Uniform solid cylinder

z-axeln rotationsaxel

densitet: $\rho = \frac{M}{L \cdot \pi R^2}$

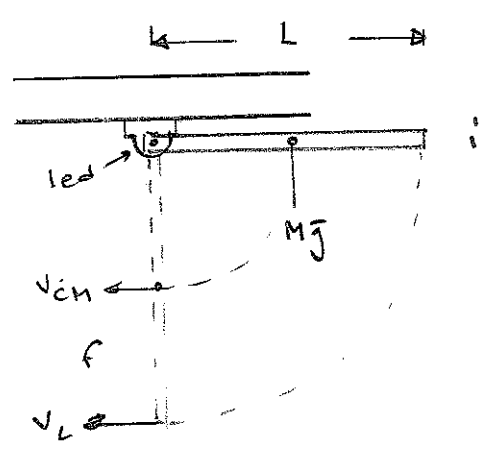


$$dm = \rho \cdot dV$$

$$dV = L \cdot 2\pi r \cdot dr$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^R r^2 (\rho dV) = \int_0^R \frac{M}{L \cdot \pi R^2} r^2 \cdot L \cdot 2\pi r \cdot dr = \\ &= 2 \frac{M}{R^2} \int_0^R r^3 dr = 2 \frac{M}{R^2} \frac{1}{4} [r^4]_0^R = 2 \frac{M}{R^2} \frac{1}{4} R^4 = \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \end{aligned}$$

Exempel 10.5
Roterande stav



(A) Vinkelhastighet i nedersta läget f!

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

$$\begin{aligned} U_f &= 0 \\ U_i &= \frac{1}{2} MgL \\ K_i &= 0 \\ K_f &= \frac{1}{2} \omega^2 I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_f - K_i &= U_i - U_f \Rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 \frac{1}{3} ML^2 = \\ &= \frac{1}{2} MgL \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

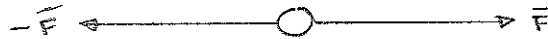
(B) v_{cm} och v_L i nedersta punkten

$$\begin{aligned} v_{cm} &= r \cdot \omega = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{2} \sqrt{3gL} \\ v_L &= r' \cdot \omega = L \sqrt{\frac{3g}{L}} = \sqrt{3gL} \end{aligned}$$

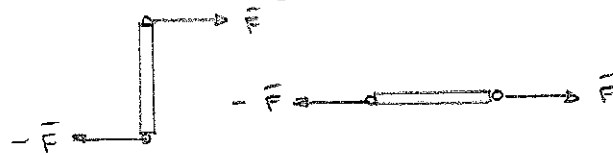
Vridande moment:

När vi egentligen studerade partikelmekanik räknade vi på kroppar som hade utsträckning; lådor som vi drog i, bilar som utsattes för krafter av olika slag med mera. Vi såg då till att krafter applicerades på ett sådant sätt att kropparna inte började rotera.

När det gäller exempelvis två krafter som appliceras på en partikel räcker det med att dessa krafter är lika stora och motriktade för att partikeln inte ska röra sig.



Nu när vi har börjat studera kroppar som har utsträckning är det inte ett tillräckligt villkor för att kroppen inte ska röra sig. Vi illustrerar med ett exempel.



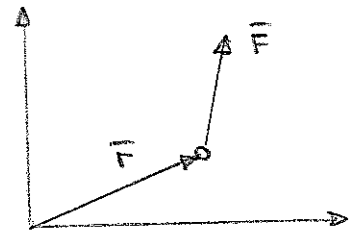
leder till vridning

Villkoret för jämvikt är : $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$
 $\vec{F}_1$ och $\vec{F}_2$ måste verka längs en gemensam linje

Detta kan formuleras mer kompakt om vi inför begreppet vridande moment eller bara moment (engelska "torque"). Den vanliga beteckningen för vridande moment är τ och storheten definieras enligt:

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\tau = r F \sin \phi$$



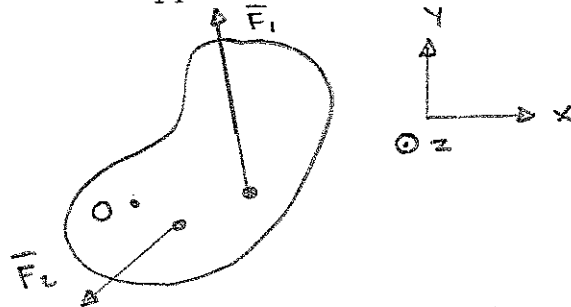
där $\mathbf{F}$ är den angripande kraften och $\mathbf{r}$ är Ortsvektorn för den punkt där kraften angriper. Lägg märke till dels att det är fråga om en kryssprodukt (eller vektorprodukt) d v s resultatet av produkten är en ny vektor och dels att det vridande momentet är beroende av valet av origo. Enheten för vridande moment är Nm. Om du har glömt hur man räknar med kryssprodukter är det bra om du repeterar detta. (Jewett & Serway sid 304 - 305)

Storheten $r \sin \phi$ kallas momentarm.

Om en kropp inte utsätts för något vridande nettomoment kommer den inte att rotera.

Om två krafter verkar på en stel kropp och båda strävar efter att rotera kroppen runt en led O kan man räkna ut nettomomentet som de åstadkommer.

Antag att $\vec{F}_1$ strävar efter att vrida kroppen moturs och att $\vec{F}_2$ strävar efter att vrida kroppen medurs.



I ett högersystem pekar z-axeln ut från pappret om den horisontella x-axeln pekar åt höger och den vertikala y-axeln pekar rakt upp. Detta innebär att en kraft som strävar efter att vrida kroppen moturs ger upphov till ett vridande moment som har samma riktning som z-axeln, d v s ett positivt vridande moment. En kraft som strävar efter att vrida kroppen medurs ger upphov till ett vridande moment som har motsatt riktning som z-axeln, d v s ett negativt vridande moment.

Detta är naturligtvis bara konventioner. Även om det vridande momentet är riktat längs z-axeln sker ju ingen som helst rörelse i z-led. Om man är konsekvent och följer dessa regler och räknar ut ett vridande moment som är positivt innebär det att kroppen kommer att rotera moturs. Punkt slut.

Exempel 10.6

Nettomomentet på en cylinder:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{\text{net}} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = (-R_1 T_1) + R_2 T_2 = \\ &= R_2 T_2 - R_1 T_1 \end{aligned}$$

siffrvärden : $T_1 = 5,0 \text{ N}$ $R_1 = 1,0 \text{ m}$
 $T_2 = 6,0 \text{ N}$ $R_2 = 0,50 \text{ m}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tau_{\text{net}} &= (6,0 \cdot 0,5 - 5,0 \cdot 1,0) \text{ Nm} = \\ &= (3,0 - 5,0) \text{ Nm} = -2,0 \text{ Nm} \end{aligned}$$

$\therefore$ cylindern roterar medurs

Men hur stor blir α ?