

Välkommen till den första delen av
FYSIK FÖR INGENJÖRER för I.
(FFY 625, 5 p)

Den innehåller tre huvudmoment:

Mekanik,
Vågfysik
&
Kvantfysik

Föreläsningsanteckningarnas syfte är att vara ett komplement till läroboken för att göra det lättare att tillgodogöra sig undervisningen. Beteckningar och upplägg är anpassat till SERWAY'S PRINCIPLES OF PHYSICS (4 upplagan), men följer inte boken slaviskt. Dessutom förbehåller jag mig rätten att göra avsteg från mina egna föreläsningsanteckningar på föreläsningarna. Det skulle bli trist om jag oavsett nya idéer och förslag till ändring av upplägg skulle vara helt bunden till i förväg nedskrivna rader. Synpunkter mottages med tacksamhet.

Vintern 2007
Åke Fäldt

MEKANIK.

Syftet med att läsa en mekanikkurs är tvåfaldigt. Dels är mekanikkunskaper en del av den ingenjörsmässiga allmänbildningen och dels är mekaniken ett ämne som särdeles bra för att träna upp förmågan att lösa problemlösningsförmågan. Den som ska inrikta sina studier åt M-hållet kommer dessutom att ha mekanikkunskaper som yrkesmässigt verktyg.

Tempot i kursen är relativt högt och vi kan inte gå igenom allt på föreläsningarna och då måste du ofta läsa in detta i läroboken på egen hand.

Kinematik i en dimension:

Kinematiken, eller rörelseläran, är en av hörnstenarna i mekaniken. När det gäller endimensionell rörelse förutsätts att du har kunskaper från tidigare studier.

Begrepp som läge (x), hastighet (v), acceleration (a) är du bekant med sedan tidigare, men här kommer en snabbrepetition

Momentanhastigheten $v = dx/dt$

Momentanaccelerationen $a = dv/dt$

Om accelerationen är konstant gäller följande användbara samband

$$v_{xf} = v_{xi} + a_x t$$

$$x_f = x_i + \frac{1}{2} (v_{xf} + v_{xi}) t$$

$$x_f = x_i + v_{xi} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_{xf}^2 = v_{xi}^2 + 2a_x (x_f - x_i)$$

Sätt dig in i hur man härleder dessa samband och räkna så många exempel så att du känner dig säker på hur man löser endimensionella rörelseproblem!

En vanlig situation där accelerationen är konstant är fritt fall. Om man låter koordinataxeln (vanligen y-axeln) peka uppåt, så är tyngaccelerationen $g = -9,81 \text{ m/s}^2$. Om koordinataxeln pekar nedåt är gället att $g = +9,81$.

$$\left. \begin{array}{l} dx = v \cdot dt \\ v = v_{ix} + at \end{array} \right\} \Rightarrow dx = (v_{ix} + at) dt$$

$$\Rightarrow \int_i^f dx = \int_i^f (v_{ix} + at) dt \Rightarrow x_f - x_i = v_{ix} t + \frac{1}{2} a t^2$$

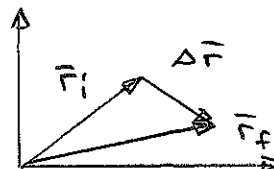
$$t = t_f - t_i$$

Kinematik i två och tre dimensioner:

När vi utvidgar till två dimensioner framgår vektoregenskaperna av läge, hastighet och acceleration tydligt. I den följande texten kommer två olika beteckningar för vektorer att användas antingen fet text såsom lägesvektorn $\mathbf{r}$, hastighetsvektorn $\mathbf{v}$ och accelerationsvektorn $\mathbf{a}$ eller $\vec{r}$, $\vec{v}$ och $\vec{a}$.

Förändring av lägesvektorn

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_f - \mathbf{r}_i$$



Momentanhastigheten $\mathbf{v}$ ges av sambandet

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt.$$

Observera att vi skiljer på de två begreppen hastighet och fart (engelska velocity och speed). Hastigheten är en vektor $\mathbf{v}$ medan farten v är en skalär - absolutbeloppet av v . Hastighetsmätaren i bilen visar bilens fart!

På samma sätt fås momentanaccelerationen $\mathbf{a}$

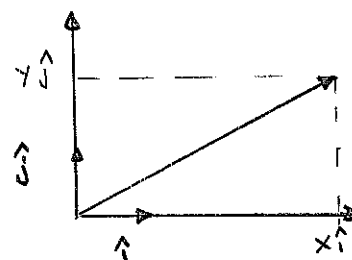
$$\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt.$$

Vi kommer att studera flera exempel där du får tillfälle att bekanta dig närmare med dessa samband.

När man tecknar en vektor i exempelvis ett tvådimensionellt ortonormerat koordinatsystem (rätvinkliga axlar och basvektorer utefter axlarna som har längd = 1) såsom ett vanligt xy-system skriver man:

$$\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}}$$

$\hat{\mathbf{i}}$ och $\hat{\mathbf{j}}$ är enhetsvektorer i x- respektive y-led.

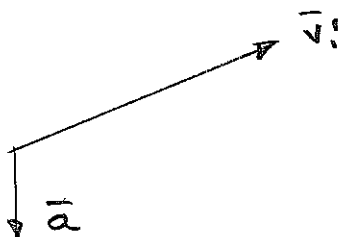


Genom att använda samma resonemang som i det endimensionella fallet fås följande samband om accelerationen $\mathbf{a}$ är konstant. (Lägg märke till att detta innebär att såväl riktning som belopp av $\mathbf{a}$ är konstanta):

$$\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_i + \mathbf{a}t$$

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

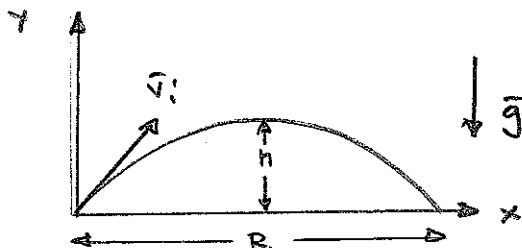
Ur det andra sambandet framgår att $\Delta \mathbf{r}$ ligger i det plan som spänns upp av vektorerna $\mathbf{v}_i$ och $\mathbf{a}$. Därför kan man ofta beskriva en tredimensionell rörelse i ett visst plan.



Kaströrelser:

När man behandlar kaströrelser gör man ofta approximationen att luftmotståndet kan försummas och att g är konstant. Under dessa förutsättningar beskriver kaströrelsen en parabel. ($y = ax - bx^2$)

För rörelsen i horisontell led gäller att hastigheten är konstant medan rörelsen i vertikal led påverkas av tyngaccelerationen g .



Sambandet

$$\mathbf{r}_f = \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_i t + \frac{1}{2} \mathbf{a} t^2$$

är en vektorekvation och ger

$$x_f = x_i + v_{ix} t + \frac{1}{2} 0 t^2 = x_i + v_i \cos \theta_i t$$

samt

$$y_f = y_i + v_i \sin \theta_i t - \frac{1}{2} g t^2$$

genom att lösa ut t ur x -ekvationen och sätta in i y -ekvationen får man

$$y_f = (\tan \theta_i) x_f - (g/2v_i^2 \cos^2 \theta_i) x_f^2$$

Man kan bland annat räkna ut den maximala kashöjden h och kastlängden R . Man får då:

$$h = (v_i^2 \sin^2 \theta_i) / g$$

samt

$$R = (v_i^2 \sin 2\theta_i) / g$$

Den senare ger att i man får den största kastlängden (i det idealiserade fallet) är utkastvinkeln är 45 grader.

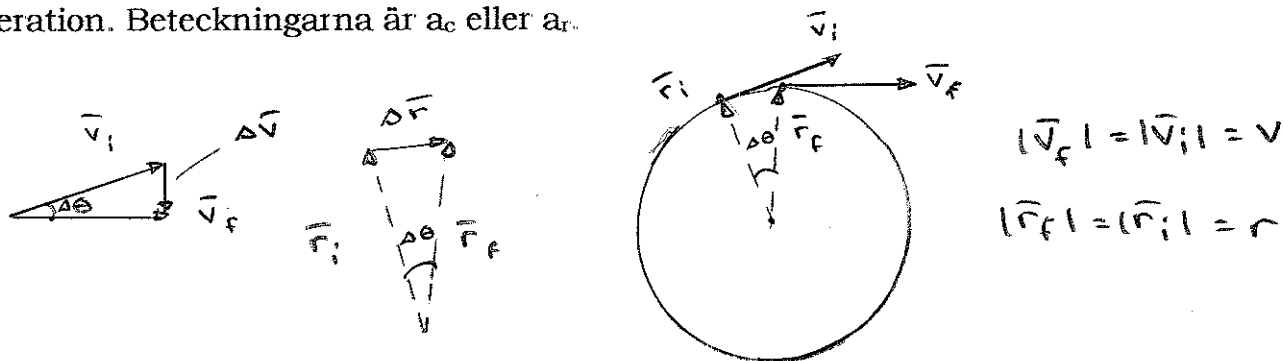
Uniform cirkulär rörelse:

Vi ska studera ett viktigt fall; uniform cirkulär rörelse. Det innebär att något rör sig i en cirkelformad bana med konstant fart v . Hastigheten $\mathbf{v}$ är däremot inte konstant eftersom dess riktning ändras under rörelsens gång. En bil som håller farten 50 km/h och som kör i en cirkelformad rondell är ett exempel på uniform cirkulär rörelse.

Om vi kräver att rörelsen ska vara cirkelformad, men tillåter att farten ändras har vi icke uniform cirkulär rörelse. Detta kommer vi till lite senare.

Nu ska vi bara studera rörelsen och återkommer till vilka krafter som kan möjliggöra den senare när vi har bekantat oss med Newtons lagar och kraftbegreppet.

Eftersom $\mathbf{v}$ inte är konstant är accelerationen $\mathbf{a}$ skild från noll. Vi ska nu bestämma accelerationens belopp och riktning. Den acceleration som man talar om i uniform cirkulär rörelse kallas centripetalacceleration eller radiell acceleration. Beteckningarna är a_c eller a_r .



Medelacceleration:

$$\mathbf{r}_i = \text{läge vid tiden } t_i$$

$$\mathbf{r}_f = \text{läge vid tiden } t_f$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{\text{ave}} = \frac{\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (1)$$

Triangelarna ovan är likformiga.

$$\Rightarrow \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{v} = \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{r} \quad \Rightarrow |\Delta \mathbf{v}| = \frac{v}{r} |\Delta \mathbf{r}| \quad (2)$$

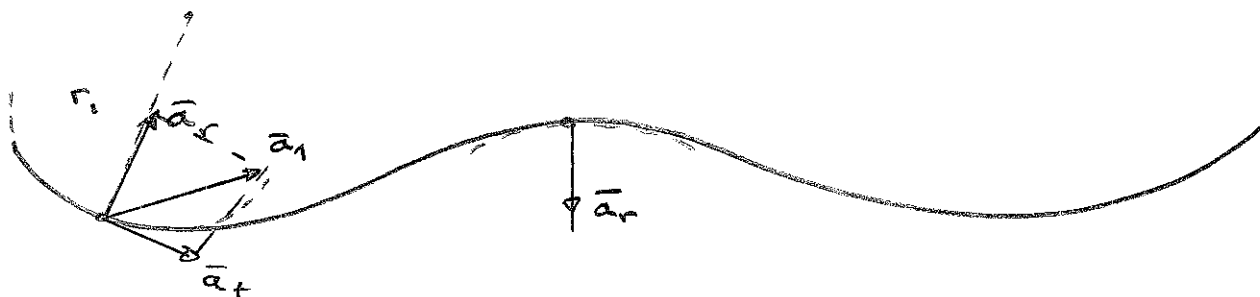
$$(1) \text{ ger } |\bar{\mathbf{a}}_{\text{ave}}| = \frac{|\Delta \mathbf{v}|}{\Delta t}$$

$$\text{Insättning av (2)} \quad \Rightarrow |\bar{\mathbf{a}}_{\text{ave}}| = \frac{v}{r} \frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Låt Δt gå mot noll. Då ser man att $\Delta \mathbf{v}$ riktar rät mot cirkelns centrum.

Tangentiell och radiell acceleration:

Låt oss nu betrakta rörelse längs en bana som i figuren nedan.



För att kunna röra sig i en sådan bana krävs mer än centripetalacceleration.

Accelerationen har förutom $\mathbf{a}_r$ en komponent vinkelrät mot denna $\mathbf{a}_t$, tangentiella accelerationen. Den totala accelerationen $\mathbf{a}$ ges av uttrycket

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$$

$\mathbf{a}_r$ är alltid riktad in mot centrum av den tänkta cirkel som bestämmer den momentana cirkelrörelsen (med radien r) och sedan tidigare vet vi att

$$a_r = -v/r^2$$

Den tangentiella accelerationen $\mathbf{a}_t$ kan antingen vara riktad i den momentana färdriktningen eller motriktad denna.

$$a_t = dv/dt$$

Om farten ökar är dv/dt positiv och $\mathbf{a}_t$ pekar då i färdriktningen. Det innebär att den totala accelerationen $\mathbf{a}$ pekar snett inåt/framåt.

Om farten minskar är dv/dt negativ och $\mathbf{a}_t$ pekar mot färdriktningen. Det innebär att den totala accelerationen $\mathbf{a}$ pekar snett inåt/bakåt.

Vi kan kosta på oss att gå händelserna i förväg och snegla på vad det är som gör att en bil att köra i en bana som den i figuren överst på sidan. Såväl den radiella som den tangentiella accelerationen möjliggörs av friktion mot vägbanan.

Newtons lagar.

I de tidigare avsnitten har vi studerat rörelser. Nu kommer vi till det som åstadkommer rörelsen; KRAFTER

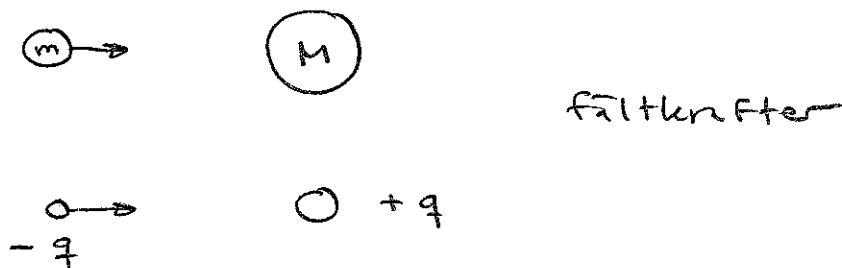
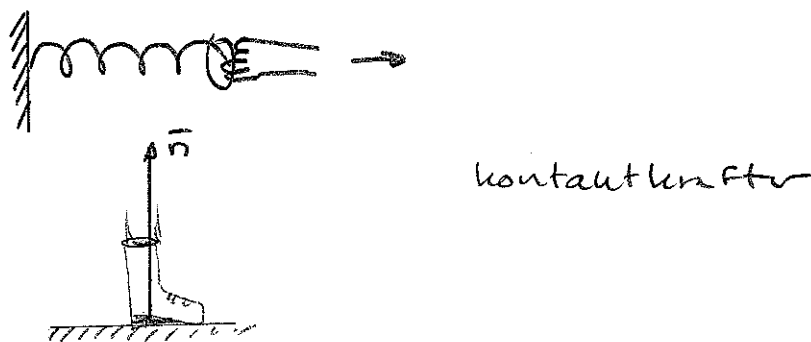
Kraftbegreppet:

Vi har väl alla en intuitiv uppfattning, baserad på våra vardagliga erfarenheter, om vad krafter är för något.

Man brukar ibland dela upp krafter i två klasser; kontaktkrafter och fältkrafter.

Krafter som är man drar i en fjäder, sparkar till en boll eller står på ett golv känner vi av kontaktkrafter. Tyngdkraften, magnetiska och elektriska krafter förutsätter ju inte kontakt mellan kroppar och de kallas därför fältkrafter. Denna uppdelning kan vara en hjälp, men egentligen kan man inte dela upp krafter på detta sätt. Kontaktkrafterna åstadkoms av fältkrafter på atomär nivå. Det som hindrar att du sjunker igenom golvet är fältkrafter mellan atomerna längst ut på dina skosulor och atomerna i golvytan.

Krafter är vektorer. De bestäms av såväl riktning som belopp.



Newtons lagar:

1. Tröghetslagen.

Om ett objekt inte växelverkar med andra objekt, så är det möjligt att identifiera ett koordinatsystem i vilket objektet har accelerationen noll.

eller

I avsaknad av yttre krafter befinner sig ett objekt i vila eller rör sig med konstant hastighet när det betraktas från icke accelererat koordinatsystem.

2. Accelerationen hos ett objekt är direkt proportionell mot nettokraften som verkar på det och omvänt proportionell mot objektets massa. Den vanligaste formen av Newtons andra lag är

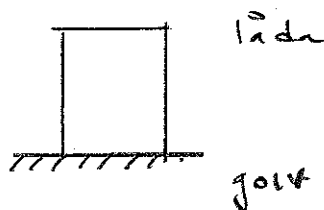
$$\mathbf{F} = m \mathbf{a}$$

Den formen förutsätter att objektets massa är konstant.

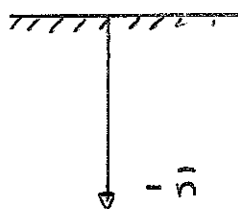
3. Om två objekt växelverkar med varandra gäller

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

där $\mathbf{F}_{12}$ är den kraft som objekt 1 verkar med på objekt 2 och $\mathbf{F}_{21}$ är den kraft som objekt 2 verkar med på objekt 1.



$\vec{n}$ = kraft på lådan orsakad av växelverkan med golvet

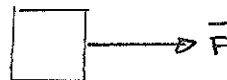


$-\vec{n}$ = kraft på golvet orsakad av växelverkan med lådan.

Tillämpningar av Newtons lagar:

Ingen rotation.

Nu i mekanikkursens början studerar vi egentligen objekt som saknar utsträckning. För att göra framställningen lite mer färgstark är exemplen fyllda med bilar, lådor, personer och annat som har utsträckning och som kan rotera. I exempel som följer kommer vi att se till att krafter appliceras så att föremålen inte roterar, utan bara translateras.



Snören.

I problemen förekommer ofta snören. De förutsätts vara otänjbara och masslösa. Spännkrafter i snören brukar betecknas med **T** eller **S**.



Trissor.

De trissor som förekommer i början av kursen är masslösa och de har dessutom helt friktionsfria ytor. Det senare innebär att snören som ligger på dem kan glida på trissan utan att den börjar rotera. Senare i kursen kommer vi att ta hänsyn till trissornas rotation.



Friläggning.

Ett mekanikproblem består ofta av flera delkroppar som växelverkar med varandra. En mycket effektiv metod för att lösa sådan problem är FRILÄGGNING. Det innebär att man ritar en figur för varje delkropp och studerar de krafter som verkar på den kroppen. Ibland, men inte så ofta, kan det vara svårt att sätta lämpliga gränser för friläggningen. En kloss består av atomer, men vi avstår från att frilägga varje atom. För att bestämma accelerationen som två klossar som är i kontakt med varandra får av en yttre nettokraft, kan man behandla de två som en enda enhet. Om man däremot är intresserad av kontaktkraften mellan klossarna måste man frilägga dem.

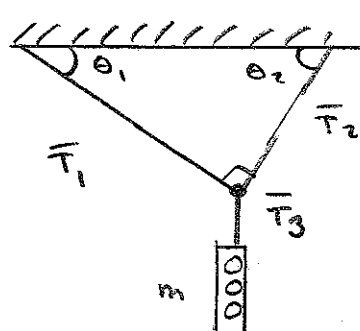
Tyngkraften.

Newtons andra lag $F = ma$ säger att närvaron av en nettokraft leder till en acceleration. ma är inte någon kraft utan resultatet av en nettokraft. När det gäller en kropp som utsätts för en tyngdkraft skulle vi egentligen beteckna denna med w (weight), men något oegentligt kommer vi att beteckna den med mg , som ju egentligen inte är kraften utan är massan multiplicerad med den acceleration som kroppen skulle få om den föll fritt.



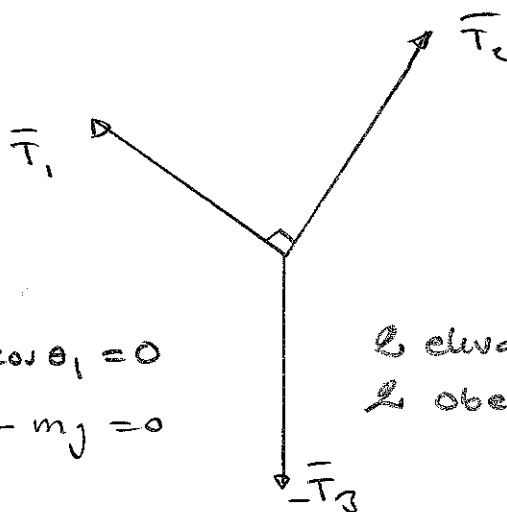
Exempel 4.2
Trafikljus i vila.

Allt i vila



$$\theta_1 = 37^\circ \quad \theta_2 = 57^\circ$$

Knutpunkten



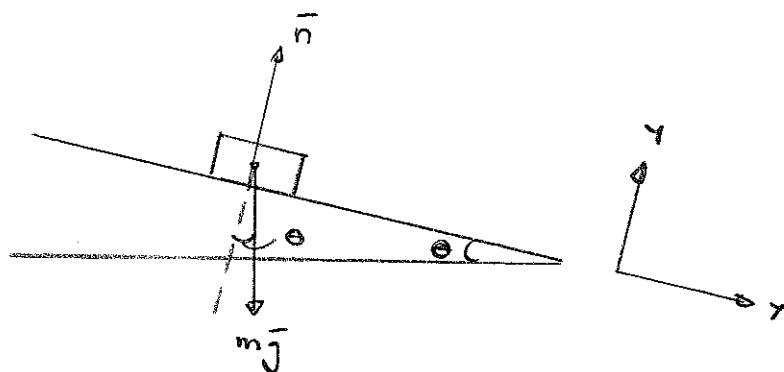
2 ekvationer
2 obekanta

$$|\vec{T}_3| = |\vec{T}_3| = m\vec{g}$$

$$x: T_2 \cos \theta_2 - T_1 \cos \theta_1 = 0$$

$$y: T_1 \sin \theta_1 + T_2 \sin \theta_2 - m\vec{g} = 0$$

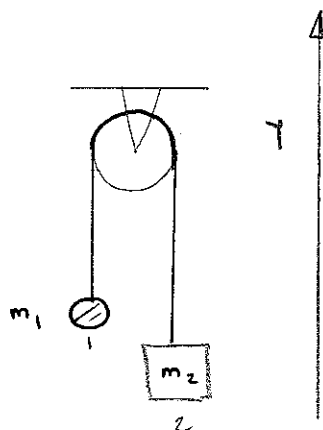
Exempel 4.3
Släde på friktionsfri snö.



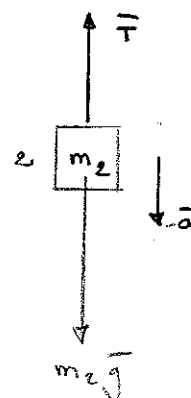
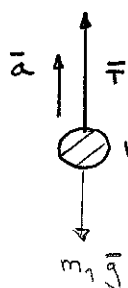
$$\sum F_x = m\vec{g} \cdot \sin \theta = m a_x$$

$$\sum F_y = m\vec{g} \cdot \cos \theta - n = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = g \cdot \sin \theta}$$

ii Atwoods maskin

Figuren står i
fallet $m_2 > m_1$
ger $\vec{a}$ i slutet.



$$(1) \quad \sum F_y = T - m_1 g = m_1 a_1 = m_1 a$$

$$(2) \quad \sum F_y = T - m_2 g = -m_2 a_2 = -m_2 a$$

2 obekanta T och a
2 ekvationer

$$(1) - (2)$$

$$\Rightarrow -m_1 g + m_2 g = m_1 a + m_2 a$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) g$$

Insättning av detta ger

$$T = \left(\frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

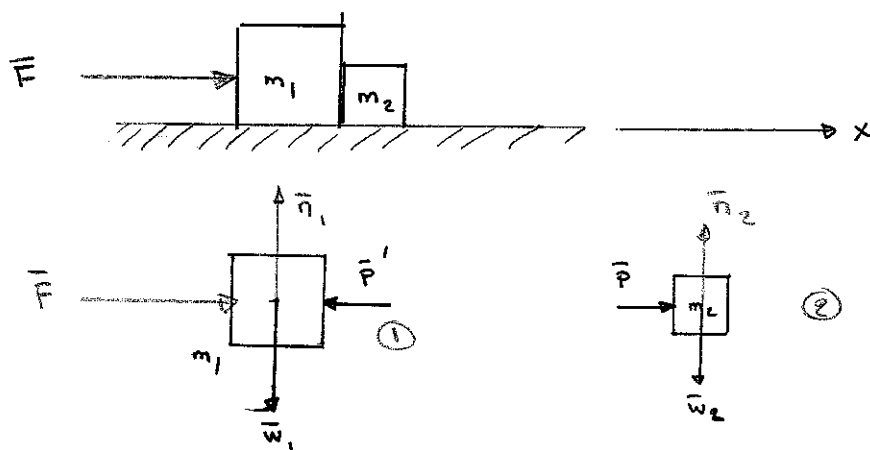
$$m_1 = m_2 \Rightarrow a = 0 \quad \text{såväl som} \quad T = m_1 g$$

rimligt!

$$(1) \quad m_1 \ddot{y}_1 \hat{y} = \vec{T}_1 \hat{y} - g m_1 \hat{y}$$

$$(2) \quad m_2 \ddot{y}_2 \hat{y} = \vec{T}_2 \hat{y} - g m_2 \hat{y}$$

iv) Ett block skjuter ett annat framför sig.



Samma acceleration för båda blocken $\vec{F}$ är den enda pålagda kraften i x-led.

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2) a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{F}{m_1 + m_2}}$$

Bestäm kontaktkraften!

$$\textcircled{2}: \quad \sum F_x = P = m_2 a \quad \Rightarrow (\text{se ovan}) \quad P = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F$$

kolla med $\textcircled{1}$!

$$\sum F_x = F - P' = F - P = m_1 a$$

$$\Rightarrow P = F - m_1 a = (\text{se ovan}) = F - \frac{m_1}{m_1 + m_2} F =$$

$$= \frac{m_1 F + m_2 F - m_1 F}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F \quad \text{stämmer!}$$

siffror:

$$m_1 = 2 \text{ kg} \quad m_2 = 1 \text{ kg}$$

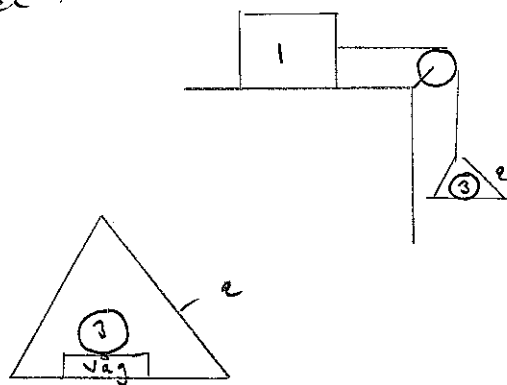
$$\Rightarrow P_1 = \frac{1}{2+1} F = \frac{1}{3} F$$

omvänd ordn.

$$m_1 = 1 \text{ kg} \quad m_2 = 2 \text{ kg}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{2}{1+2} F = \frac{2}{3} F \quad P_2 \neq P_1!$$

Exempel:

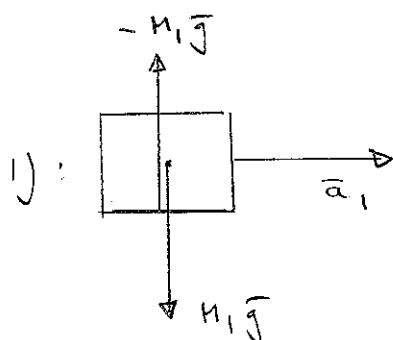


Givet: $M_1 = 2,0 \text{ kg}$
 $M_2 = 3,0 \text{ kg}$
 $M_3 = 1,0 \text{ kg}$

ingen friktion
 snöret otänjbart
 masslös trissa utan
 friktion
 vågen masslös.

Sök: accelerationen och
 vågens utslag.

lösning
 Frläggning



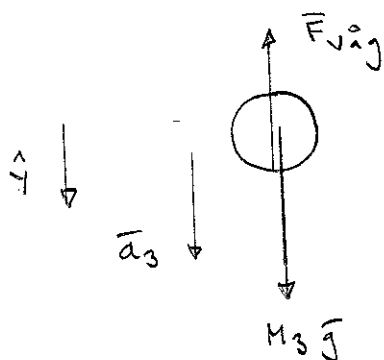
$\vec{S}_1 =$ spännkraften i snöret

$$\vec{S}_1 = M_1 \vec{a}_1 \quad \vec{S}_1 \parallel \vec{a}_1$$

$$S_1 = M_1 a_1$$

2.) vänta lite

3)



$$M_3 \vec{g} + \vec{F}_{våg} = M_3 \vec{a}_3$$

$$M_3 g \hat{y} + F_{våg} (-\hat{y}) = M_3 a_3 \hat{y}$$

$$\Rightarrow M_3 g - F_{våg} = M_3 a_3$$

Nu 2:

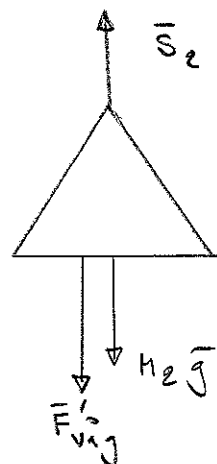
$$\vec{F}'_{våg} = F_{våg} \hat{y}$$

$$\vec{S}_2 = S_2 (-\hat{y}) = S_1 (-\hat{y})$$

$$M_2 \vec{g} + \vec{F}'_{våg} + \vec{S}_2 = M_2 \vec{a}_2$$

$$\Rightarrow M_2 g + F_{våg} - S_1 = M_2 a_2$$

frikionslös
 yta på
 trissan



$$\text{otänjbart snöre} \Rightarrow |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = |\vec{a}_3| = a$$

Vi har tre ekvationer och tre obekanta. Lösbar.

$$\begin{cases} S_1 = M_1 a & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 g + F_{våg} - S_1 = M_2 a & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_3 g - F_{våg} = M_3 a & (3) \end{cases}$$

$S_1 = M_1 a$ och (2) + (3) ger

$$(M_2 + M_3) g - M_1 a = (M_2 + M_3) a$$

Detta hade vi kunnat sätta upp direkt.

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g} = \frac{3+1}{6} g = \frac{2}{3} g$$

sätt in i (3)

$$\Rightarrow M_3 g - F_{våg} = M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow F_{våg} &= M_3 g - M_3 \frac{M_2 + M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g = \frac{M_1 \cdot M_3}{M_1 + M_2 + M_3} g = \\ &= \frac{1 \cdot 2}{6} g = \frac{1}{3} g \end{aligned}$$

du ser om vägen är graderad på vanligt sätt så visar den 1/3 kg. Massan 3 är 1 kg.