

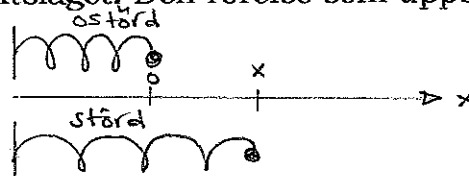
Svängningsrörelser.

För att ni ska få bättre förutsättningar när ni gör laborationen Svängningar hoppar vi framåt i boken till kapitlet om svängningar. Detta kapitel innehåller en del som förutsätter kunskaper om stela kroppars mekanik. Sådana har vi inte inhämtat i den här kursen ännu, så dessa tillämpningar får anstå till senare.

Svängningar innebär mer eller mindre komplicerad periodisk rörelse. Vi redan har stött på några sådana i kursens första del när vi har studerat fjädrar och enkla pendlar.

Harmoniska svängningar:

En speciell typ av periodisk rörelse uppstår när den kraft som verkar på en partikel alltid är riktad mot jämviktsläget och när storleken på denna kraft är proportionell mot avvikelsen från jämviktsläget. Den rörelse som uppstår då kallas ENKEL HARMONISK RÖRELSE.



Fjädersvängningar:

Vi återvänder nu till Hookfjädern och studerar rörelser i horisontalplanet. Vi bortser från friktion.

Den återförande kraften ges av

$$F_s = kx$$

k är kraftkonstanten eller fjäderkonstanten och mäts i enheten N/m.

Låt nu en partikel med massan m vara förbunden med fjädern. När partikeln befinner sig på avståndet x från jämviktsläget ges dess acceleration av Newtons andra lag

$$F_s = kx = ma$$

Vilket ger

$$a = - (k/m) x$$

Vi har alltså:

$$d^2x/dt^2 = - (k/m) x$$

Såväl sinus- som cosinusfunktionen är tänkbara lösningar till denna differentialekvation.

Vi väljer nu följande form för lösningarna

$$x(t) = A \cos(\sqrt{k/m} t + \Phi)$$

Vi ser att k/m bestämmer hur snabbt funktionen ändrar sig i tiden. För att förenkla framtida skrivning inför vi en konstant ω , som kallas vinkelhastigheten och som definieras

$$\omega = \sqrt{k/m}$$

Nu kan vi skriva

$$x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

A och ω är konstanter. A är maximala avvikelser från jämviktsläget och kallas amplituden. Φ kallas faskonstanten. $(\omega t + \Phi)$ är fasen hos rörelsen.

Vi kan nu derivera $x(t)$ en och två gånger och får då:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \Phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \Phi)$$

Vi ser att

$$d^2x/dt^2 = -\omega^2 x$$

Perioden T är den tid som det tar för partikeln att gå igenom en full cykel av sin rörelse. Det innebär den tid T som det tar för att öka fasen med 2π .

D v s

$$(\omega(t + T) + \Phi) - (\omega t + \Phi) = 2\pi$$

vilket innebär

$$\omega T = 2\pi \quad \text{eller} \quad T = 2\pi/\omega$$

Frekvensen f är antalet cykler per tidsenhet dvs

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$

För just fjädersvängningar gäller:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

$$a_{max} = \frac{k}{m} A$$

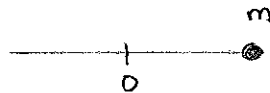
Bestämning av faskonstanten Φ :

Fastkonstanten kan anta vilket värde som helst. Värdet beror på randvillkor såsom läge och hastighet vid exempelvis tiden $t = 0$.

Om vi väljer att "sätta igång" tiden vid något av vändlägena eller när partikeln passerar $x = 0$ får vi:

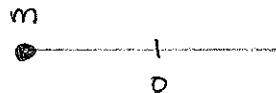
$x = A$ då $t = 0$ ger:

$$x(0) = A \cos \Phi = A \text{ dvs } \Phi = 0$$



$x = -A$ då $t = 0$ ger:

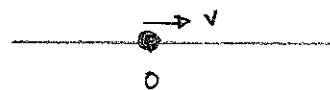
$$x(0) = A \cos \Phi = -A \text{ dvs } \Phi = \pi$$



$x = 0$ och $v > 0$ då $t = 0$ ger:

$$x(0) = A \cos \Phi = 0 \text{ och}$$

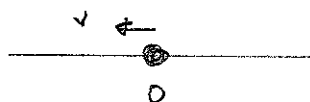
$$v(0) = -\omega A \sin \Phi > 0 \text{ dvs } \Phi = -\pi/2$$



$x = 0$ och $v < 0$ då $t = 0$ ger:

$$x(0) = A \cos \Phi = 0 \text{ och}$$

$$v(0) = -\omega A \sin \Phi < 0 \text{ dvs } \Phi = \pi/2$$



Energi hos enkla harmoniska svängningar:

Energien för en masspartikel som utför en horisontell fjädersvängning består av två delar; en kinetisk och en potentiell. Om vi antar att fjädern är masslös får vi:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} m \left(\frac{k}{m} \right) A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) \right] = \frac{1}{2} k A^2$$

$$\text{Värdet: } E = U = \frac{1}{2} k A^2$$

$$x=0 \quad E = K_{\max} = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{ty} \quad U=0$$

Den enkla pendeln:

Den pendel som visas i figuren består av ett masslöst och otänjbart snöre och en partikel (försumbar utsträckning) vars massa är m .

På partikeln verkar två krafter; spännkraften i snöret och tyngdkraften. Den tangentiella komponenten av tyngdkraften verkar som en återförande kraft.

Vi kan nu använda Newtons andra lag för att ställa upp rörelseekvationen:

$$F_t = m a_t \Rightarrow -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

s är läget utefter den cirkelformade bågen. Eftersom snörlängden L är konstant har vi sambandet

$$s = L \theta$$

Vi kan nu skriva om ekvationen enligt

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{g}{L} \sin \theta$$

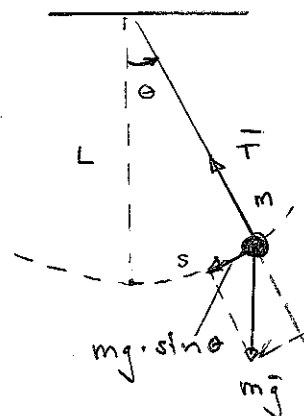
För små vinklar gäller $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$

vilket ger

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{g}{L} \theta$$

Nu känner vi igen strukturen på differentialekvationen och kan skriva:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{och} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$



Dämpade svängningar:

I en verklig svängningsrörelse har man ett motstånd som är proportionellt mot hastigheten.

$$\mathbf{B} = -b \mathbf{v}$$



Exempel på detta är den kraft som uppstår på grund av att det medium som kroppen rör sig i har en viskositet. Som exempel kan vi ta en fjädersvängning i en fluid (d v s en vätska med påtaglig förmåga att strömma).

Nettokraften består då av två delar; den återförande kraften i fjädern samt den kraft som är proportionell mot partikelns hastighet.

Newton's andra lag ger oss

$$\Sigma F_x = -kx - bv = ma_x$$

$$-kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Om den resistiva kraften från fluiden är liten ($b^2 < 4mk$) så är lösningen till differentialekvationen:

$$x = A e^{(-b/2m)t} \cos(\omega t + \phi)$$

Vinkelfrekvensen ges av

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

När den resistiva kraften är relativt liten utför partikeln fortfarande en oscillerande rörelse, men amplituden minskar successivt. Denna typ av system kallas en underdämpad oscillator.

Det är praktisk att skriva om uttrycket för vinkelfrekvensen enligt:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

där ω_0 är vinkelfrekvensen för den odämpade oscillatoren.

När b ökar och når ett kritiskt värde b_c så att

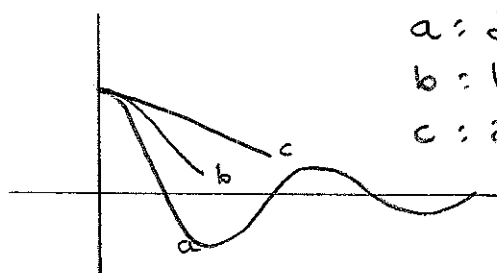
$$b_c / 2m = \omega_0$$

oscillerar inte systemet längre och sägs vara kritiskt dämpat. Det återgår till utgångsläget längs en kurva som är exponentiell.

Om $b_c / 2m > \omega_0$

Är systemet överdämpat återvänder systemet till utgångsläget, men efter längre tid än om det är kritiskt dämpat.

Dämpning innebär att den mekaniska energin minskar som en följd av värmeförluster.



a : dämpad osc.

b : kritiskt dämpad osc.

c : överdämpad osc.

Tvungna svängningar:

Om vi låter en yttre kraft utföra ett arbete på systemet får vi en ny situation. Om den yttre kraften varierar periodiskt med vinkelfrekvensen ω så att

$$F = F_0 \cos \omega t$$

Får vi en ny differentialekvation:

$$F_0 \cos \omega t - b \frac{dx}{dt} - kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Efter tillräckligt lång tid, så lång att den tillförda mekaniska energin är lika med värmeförlusterna får lösningarna följande utseende:

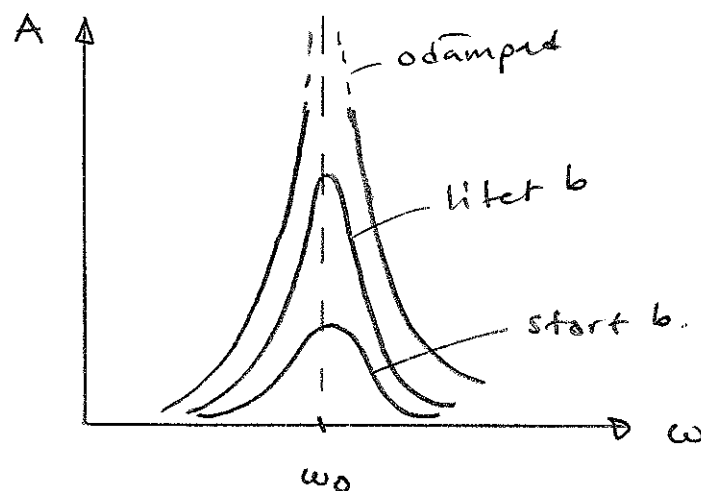
$$x(t) = A \cos(\omega t + \Phi)$$

där amplituden A ges av

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

ω_0 är egenfrekvensen hos den odämpade oscillatoren.

Figuren visar A som funktion av den pålagda kraftens vinkelfrekvens för olika värden på dämpningskonstanten b . Som synes blir amplituden särskilt stor om den pålagda kraftens vinkelfrekvens ω överensstämmer med egenfrekvensen ω_0 .



FLUIDMEKANIK.

En vätska kännetecknas av att strukturen av atomer och molekyler är oordnad. Exempel på vätskor är således glas, vatten och gaser. En fluid är en vätska som har påtaglig förmåga att strömma.

Vi kommer att studera fysiken hos stillastående fluider i fluidstatiken och fysiken hos strömmande fluider i fluiddynamiken. Vi börjar med statik.

Tryck:

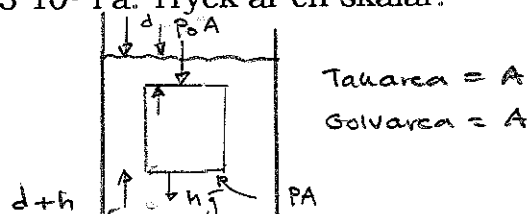
Tryck är kraft per ytenhet

$$P = F/A$$

SI-enhet N/m^2 eller Pa (Pascal)

Normalt atmosfärstryck är $1,00 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Tryck är en skalär.

Tryckets djupberoende:



Betrakta ett lådformat fluidelement enligt figuren. Elementet befinner sig i vila. Detta innebär att nettokraften på det måste vara noll. Vartenda ytelement utsätts för en kraft. Det är dock enkelt att inse att det bara är krafterna i vertikal led som ger en nettokraft; dvs kraften på elementets "tak", "golv" samt tyngdkraften på elementet. Tak och golv är parallella med fluidens yta. Antag att trycket vid fluidelementets tak är P_0 och att det är P vid dess golv.

$$\begin{aligned} \text{vila: } PA - (Mg + P_0 A) &= 0 & \text{men } M &= \rho V = \rho A h \\ \Rightarrow PA &= P_0 A + \rho g h A \end{aligned}$$

Detta leder till

$$P = P_0 + \rho g h$$

Om taket befinner sig precis i ytan är P_0 lika med atmosfärstrycket. Om P_0 ökar så ökar trycket i varje del av fluiden och på behållarens väggar. Detta kallas Pascals princip. Detta utnyttjas bland annat i hydrauliska lyftanordningar.

Lyftkraft och Archimedes princip.

Om man sänker ned en kropp i en fluid kommer den att utsättas för en lyftkraft. Trycket på dess undersida är större än trycket på dess ovansida. Detta leder till att den uppåtriktade kraften på dess undersida är större än den nedåtriktade kraften på dess ovansida.

Om lyftkraften på kroppen är exakt lika stor som tyngdkraften på den kommer kroppens ovansida att befinna sig precis i ytan. Om lyftkraften är mindre än tyngdkraften kommer kroppen att sjunka. Om lyftkraften är större än tyngdkraften kommer ovansidan av kroppen att hamna så långt och ovanför ytan (och därmed undersidan så nära ytan) att lyftkraft och tyngdkraft blir lika stora.

$$\bar{B} = \text{lyftkraft},$$

Vila:

$$\Rightarrow B - F_g = 0 \Rightarrow B = Mg$$

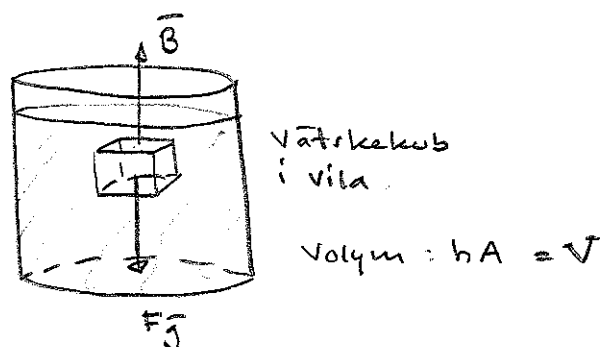
Byt nu ut vattenkuben mot en kub av exempelvis stål.

Lyftkraften är skillnaden i kraft på golvet $\uparrow$ och kraft på taket $\downarrow$

$$\begin{aligned} B = F_{\text{bot}} - F_{\text{top}} &= P_{\text{bot}} \cdot A - P_{\text{top}} \cdot A = \Delta P \cdot A = \\ &= \rho_f g h A = \rho_f g V \end{aligned}$$

Lyftkraften är lika stor som tyngdkraften på den undanträngda fluiden. Dock är riktningarna motsatta. $\bar{B} \uparrow$

$$Mg \downarrow$$



FLUIDDYNAMIK

Flöden:

När en fluid strömmar, rör sig, kan denna vara av två typer; laminär eller turbulent.

Vid laminär strömning följer varje partikel en jämn bana, så att banorna eller strömlinjerna för olika partiklar aldrig korsar varandra.



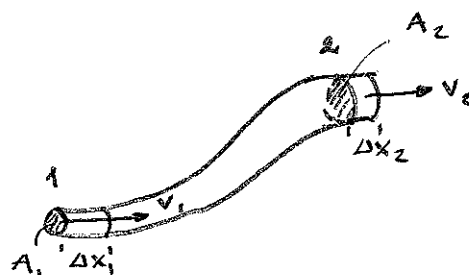
Vid turbulent strömning är strömningen oregelbunden och virvlar bildas.

Viskositeten hos en fluid anger graden av intern friktion i den. När olika lager glider förbi varandra, påverkas de av friktion. En fullständig beskrivning av dynamiken hos en verklig fluid är mycket komplicerad. För att vi ska kunna räkna på olika fluiddynamiska fenomen krävs att vi gör en del förenklingar. En ideal fluid karakteriseras av:

1. Den är icke-viskös. Intern friktion försummas.
2. Den är inkompressibel. Dess täthet är konstant oavsett trycket.
3. Den strömmar laminärt.

Kontinuitetsekvationen:

Betrakta ett strömrör som i figuren



Om fluiden är inkompressibel måste det som tillförs i punkt 1 bortföras i punkt 2.

Detta leder till

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2$$

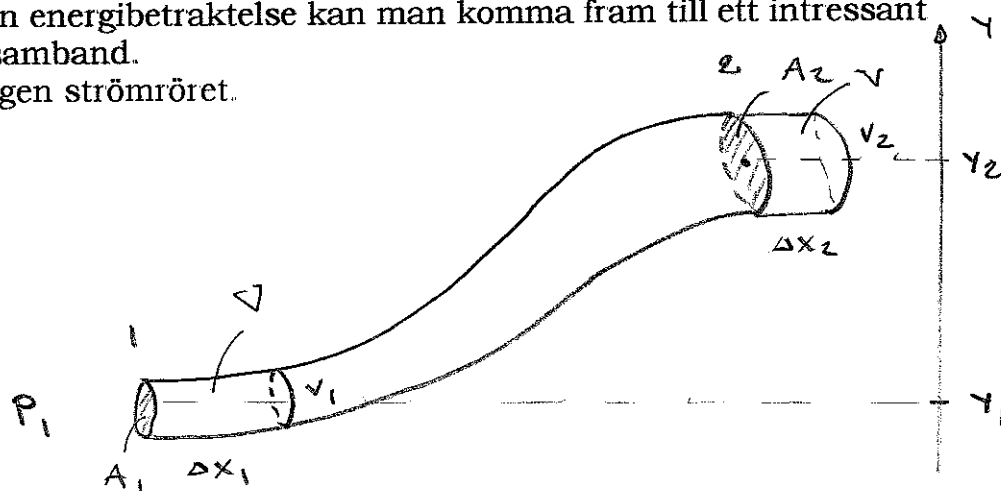
$$A_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = A_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 = A v$$

Produkten av area och strömningshastighet är konstant i hela strömröret.

Bernoullis ekvation:

Genom att göra en energibetraktelse kan man komma fram till ett intressant och användbart samband.

Vi betraktar återigen strömröret.



Under tiden Δt :

Omgivningen utför nettoarbetet W på strömröret där

$$W = F_1 \cdot \Delta x_1 - F_2 \cdot \Delta x_2 = P_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 - P_2 A_2 \cdot \Delta x_2 = (P_1 - P_2) V$$

Rörelseenergiändring hos strömröret

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} \rho V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V v_1^2$$

Ändring av potentiell energi hos strömröret

$$\Delta U = m g y_2 - m g y_1 = \rho V g y_2 - \rho V g y_1$$

$$W = \Delta K + \Delta U \quad \text{ger}$$

$$(P_1 - P_2) V = \frac{1}{2} \rho V v_2^2 - \frac{1}{2} \rho V v_1^2 + \rho V g y_2 - \rho V g y_1$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$\therefore P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g y = \text{konstant}$$

Exempel 15.7

Torricellis utströmningslag:

En sluten vätsketank står på ett horisontellt bord och har ett hål i sidan. Hålet är öppet mot atmosfärstryck. Trycket ovanför vätskans yta hålls vid det konstanta värdet P .

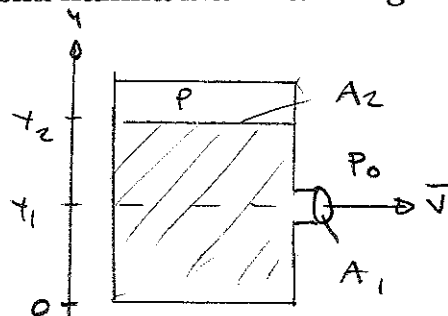
- A. Bestäm hastigheten hos vätskan när den lämnar hålet?
 B. På vilken höjd ska hålet sitta om strålen ska hamna maximalt långt från tanken när den träffar bordet?

A

$$A_2 \gg A_1 \Rightarrow v_2 \ll v_1$$

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

med $h = y_2 - y_1$ får vi



$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_0)}{\rho} + 2gh}$$

Öppen tank : $P = P_0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$
 (samma som vid fritt fall !)

B

Öppen tank : $v_1 = \sqrt{2g(y_2 - y_1)}$

Fallsörelse :

$$0 = y_1 - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y_1}{g}}$$

$$x_f = v_1 \cdot t = \sqrt{2g(y_2 - y_1)} \cdot \sqrt{\frac{2y_1}{g}} =$$

$$= 2(y_2 y_1 - y_1^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx_f}{dy_1} = \frac{1}{2} \cdot 2(y_2 y_1 - y_1^2)^{-1/2} (y_2 - 2y_1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{1}{2} y_2}$$

