20.23

I en viss volym ges den elektriska potentialen av funktionen

$$V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$$

Bestäm ett uttryck för x-, y- respektive z-komponenten för det elektriska fältet i denna volym. Bestäm fältets belopp i punkten (1, 0 -2).

Lösning:

$$dV = -\bar{E}\cdot d\bar{s}$$

$$\Rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial V_z}{\partial z}$$

$$V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -5 + 6xy \\ -\dfrac{\partial V}{\partial y} = +3x^2 - 2z^2 \\ -\dfrac{\partial V}{\partial z} = -4yz \end{cases}$$

I punkten (1, 0, −2) gäller:

$$E_x = -5$$
$$E_y = 3 - 8 = -5$$
$$E_z = 0.$$

$$\Rightarrow |\bar{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{50} \approx \underline{\underline{7{,}07\ \frac{N}{C}}}$$

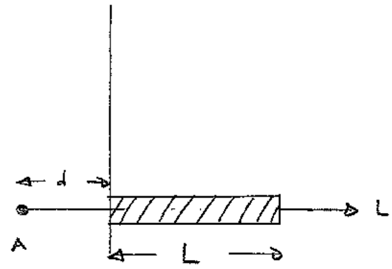
20.25

En stav med längden L ligger längs x-axeln och har sin vänstra ände i x = 0 såsom visas i figuren. Den har en homogen laddningsfördelning $\lambda = \alpha x$, där α är en positiv konstant (enhet?).
Bestäm potentialen i punkten A.

Lösning:

$\lambda = \alpha \cdot x \qquad \frac{C}{m} = \alpha \cdot m$

$\therefore$ enhet för $\alpha \quad \frac{C}{m^2}$



Potentialen orsakad av en punktladdning:

$$V = -\int_{\infty}^{r} \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\int_{\infty}^{r} k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot dr\, \hat{r} =$$

$$= -k_e Q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} = k_e \frac{Q}{r}$$

Staven består av en massa punktladdningar dq

r = avståndet mellan A och dq

$$V(A) = k_e \int_{\text{staven}} \frac{dq}{r} = k_e \int \frac{\lambda dx}{r} = k_e \alpha \int_0^L \frac{x \cdot dx}{d+x} =$$

$$= [\text{sätt } y = d + x \Rightarrow dx = dy \text{ och } x = y - d] =$$

$$= k_e \alpha \int_d^{d+L} \frac{y-d}{y}\, dy = k_e \alpha \left[\int_d^{d+L} dy - \int_d^{d+L} \frac{d}{y} \cdot dy \right] =$$

$$= k_e \alpha \left[(d+L) - L - d \cdot \ln \frac{d+L}{d} \right] =$$

$$= k_e \alpha \left[d - d \cdot \ln\left(1 + \frac{L}{d}\right) \right]$$

20.38

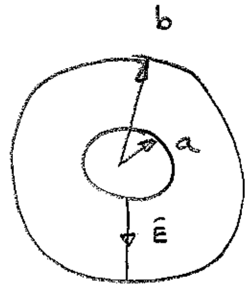
En sfärisk kondensator består av ett yttre sfäriskt ledande skal med radie b och laddning –Q samt ett inre med radien a och laddningen +Q.
Bestäm kondensatorns kapacitans.
Hur stor är kapacitansen för stora värden på b?

Lösning:

Bestäm ΔV !

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Fältet mellan a och b ges med hjälp av Gauss' sats.



$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = k_e \frac{Q}{r^2}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{s} = [\bar{E} \parallel d\bar{s}] = -\int_a^b E \cdot dr =$$

$$= -\int_a^b k_e \frac{Q}{r^2} \cdot dr = k_e Q \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right] =$$

$$= -k_e Q \frac{b-a}{ab}$$

$$\Rightarrow V_a - V_b = k_e Q \frac{b-a}{ab} = \Delta V$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{k_e Q \frac{b-a}{ab}} = \frac{ab}{k_e(b-a)}$$

b stort

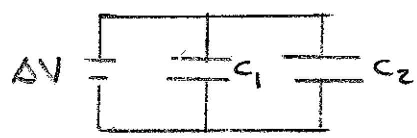
$$\Rightarrow C \approx \frac{a}{k_e}$$

20.49

Två kondensatorer med kapacitanserna 25,0 mikrofarad och 5,00 mikrofarad parallellkopplas och laddas upp med hjälp av en 100-volts spänningskälla.
Rita kretsen och beräkna den totala energin som är lagrad i de två kondensatorerna.
Hur stor skulle potentialskillnaden kondensatorerna om de hade kopplats i serie om de skulle innehålla lika mycket energi som i det föregående fallet?

Lösning:

Parallellkoppling: $\Delta V = 100\ V$

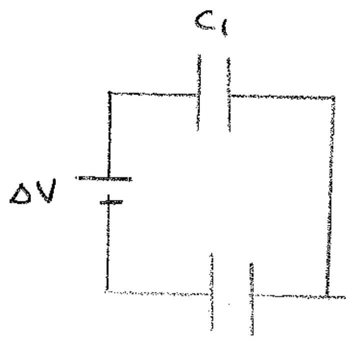


$$C_p = C_1 + C_2 = (25{,}0 + 5{,}00)\ \mu F = 30{,}0\ \mu F$$

Potentiell energi i kondensatorn: $U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 =$

$$= \frac{1}{2}\, 30{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2\ J = \underline{\underline{0{,}150\ J}}$$

Seriekoppling:



$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\Rightarrow C_s = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{25{,}0 \cdot 5{,}00}{30{,}0}\ \mu F =$$

$$= 4{,}17\ \mu F$$

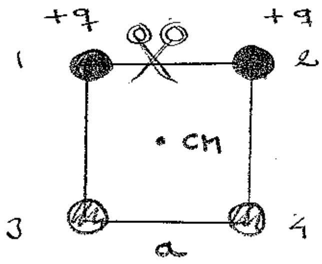
$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \Rightarrow \Delta V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}150}{4{,}17 \cdot 10^{-6}}}\ V =$$

$$= 1830\ V = \underline{\underline{1{,}83 \cdot 10^3\ V}}$$

20.68

Fyra bollar, vardera med massan m, är förbundna med fyra icke ledande snören såsom visas i figuren. Hela anordningen placeras på ett horisontellt icke-ledande friktionsfritt bord. Bollarna 1 och 2 har vardera laddningen +q och bollarna 3 och 4 är oladdade. Bestäm den maximala farten hos boll 3 och 4 efter det att man har klippt av snöret mellan bollarna 1 och 2.

Lösning:



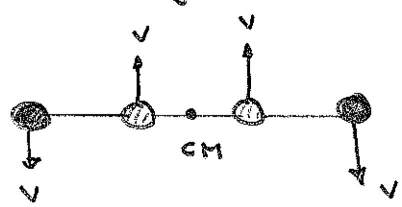
i) Mekanisk energi bevaras

ii) Tyngdpunkten rör sig inte.

i) ty endast konservativa krafter närvarande

ii) ty inga yttre krafter.

Maximal kinetisk energi



Ursprunglig potentiell energi : $q \cdot V_0 = k_e \dfrac{q^2}{a}$

Pot. energi när rörelseenergin är maximal : $k_e \dfrac{q^2}{3a}$

$$\therefore \quad k_e \frac{q^2}{a} = k_e \frac{q^2}{3a} + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

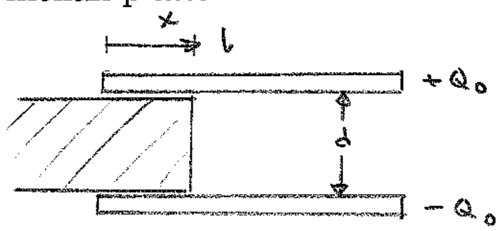
$$\Rightarrow \frac{2k_e q^2}{3a} = 2mv^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{k_e q^2}{3am}}$$

20.76

Två kvadratiska plattor vardera med sidan l är parallella med varandra såsom figuren visar. Avståndet mellan dem är d (d<<l). Plattorna är uniformt laddade med $+Q_0$ och $-Q_0$. Ett metallblock med längden l och en tjocklek som är marginellt mindre än d förs in sträckan x mellan plattorna.

a. Beräkna den lagrade energin som funktion av x.
b. Bestäm kraften på metallblocket.
c. Arean hos framkanten på metallblocket är ungefär ld. Bestäm kraft per ytenhet på framkanten.
d. Hur stor är energitätheten i det elektriska fältet mellan plattorna.

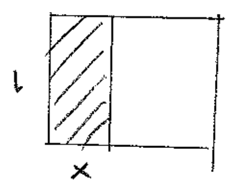


Lösning:

För metallen gäller $\kappa \to \infty$

$\Rightarrow$ Den del som är fylld med metall gäller:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 \overbrace{(lx)}^{\text{area}}}{d} \to \infty$$



lagrad energi $U = \frac{Q^2}{2C} = 0$

För den ofyllda delen gäller

$$C = \frac{\epsilon_0 l (l-x)}{d}$$

laddningen på den delen (homogen) $Q = Q_0 \frac{l(l-x)}{l^2} =$

$$= Q_0 \frac{l-x}{l}$$

a) lagrad energi

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\left[(l-x)\frac{Q_0}{l}\right]^2}{2\epsilon_0 l \frac{l-x}{d}} = \frac{Q_0^2 (l-x) d}{2\epsilon_0 l^3}$$

b) kraft på metallblocket

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{Q_0^2(l-x)d}{2\epsilon_0 l^3}\right] = +\frac{Q_0^2 d}{2\epsilon_0 l^3} \rightarrow$$

U minskar då x ökar.

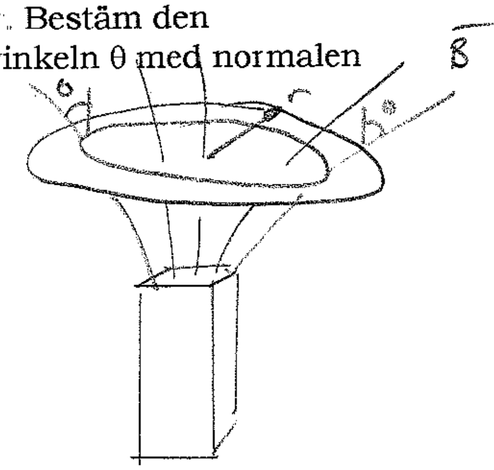
c) $$\frac{F}{dl} = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 l^4}$$

d) energitäthet $u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q_0}{\epsilon_0 l^2}\right)^2 =$

$$= \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 l^4} \quad \left[= \frac{U}{(l-x)\cdot l \cdot d}\right)$$

22.17

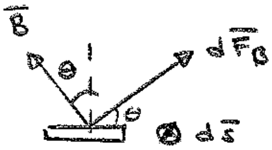
En stark magnet placeras under en horisontell ledande ring vars radie är r och som genomflyts av en ström I, såsom figuren visar. Bestäm den resulterade kraften på ringen om magnetfältet bildar vinkeln θ med normalen till ringen.

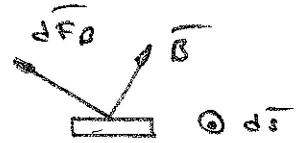


Lösning:

Den magnetiska kraften på varje del av ringen ges av

$$d\bar{F}_B = I\,d\bar{s} \times \bar{B} = I\,ds\,B$$





kraften verkar radiellt uppåt, inåt

endast komponenten $dF_B \cdot \sin\theta$ (den uppåtriktade) ger en nettokraft

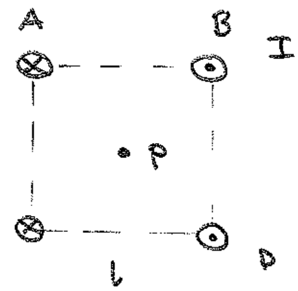
$$F_{B\uparrow} = \oint I\,ds\,B \cdot \sin\theta = IB \cdot \sin\theta \cdot \oint ds =$$

$$= \underline{\underline{2\pi r \cdot I \cdot B \cdot \sin\theta}}$$

22.37

Fyra långa parallella ledare genomflyts vardera av strömmen I = 5,00 A. Figuren visar hur arrangemanget ser ut från sidan. Strömmarnas riktningar framgår också i denna.
Beräkna det magnetiska fältet i punkten P i mitten av kvadraten om den har kantlängden l = 0,200 m.

Lösning:



Magnetiska fältstyrkans belopp på avståndet a från en lång, rak ledare

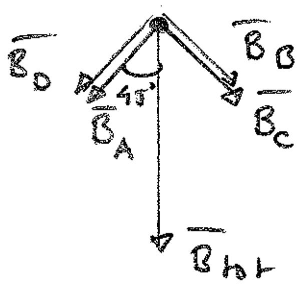
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \quad \text{där} \quad a = l\sqrt{2}/2 = l\sqrt{2}$$

Nu har vi fyra ledare som ger magnetfält i P:

$$|\bar{B}_A| = |\bar{B}_B| = |\bar{B}_C| = |\bar{B}_D| = B = \frac{\mu_0 I}{2\pi l \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5{,}00}{2\pi \cdot 0{,}200 \cdot \sqrt{2}} =$$

$$= 7{,}07\ \mu T$$



Totalt:

$$B_{tot} = 4B \cdot \cos\theta = 4 \cdot 7{,}07 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{20{,}0\ \mu T}}$$

22.40

Magnetfältet på avståndet 40,0 cm från en lång, rak ledare som genomflyts av strömmen 2,00 A är 1,00 mikrotesla.

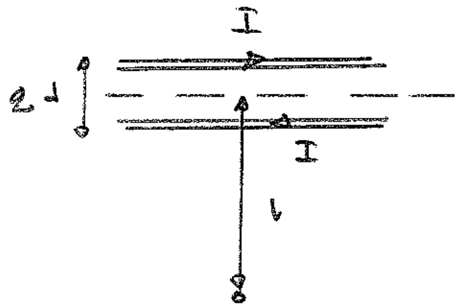
a. På vilket avstånd är magnetfältets styrka ~~1,00~~ 0,100 mikrotesla.
b. Vid ett visst tillfälle är strömmarna i de två trådarna i en förlängningssladd vardera 2,00 A i motsatta riktningar. Hur stort är magnetfältet på avståndet 40,0 cm från en punkt mitt emellan trådarna (se figuren) om de ligger på avståndet 3,00 mm från varandra?
c. På vilket avstånd är det en tiondel av detta värde?
d. Strömmen i mittråden av en koaxialkabel är vid viss tillfälle 2,00 A och lika stor fast motsatt riktad i höljet runt denna. Hur stort är det magnetiska fältet utanför koaxialkabeln?

Lösning:

a) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$; $B \sim \frac{1}{r}$ $B \sim \frac{B}{10} \Rightarrow r \sim 10\,r$

∴ $\underline{400 \text{ cm}}$

b) $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$



där $r_1 = l - d$ $r_2 = l + d$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\frac{1}{l-d} - \frac{1}{l+d}\right] =$$

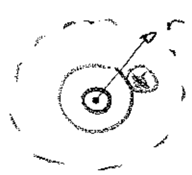
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{(l+d)-(l-d)}{(l-d)(l+d)}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\,\frac{2d}{l^2-d^2} =$$

$$= \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 2{,}00}{2\pi}\,\frac{3{,}00\cdot 10^{-3}}{0{,}40^2-(3\cdot 10^{-3})^2} = \underline{\underline{7{,}50 \text{ nT}}}$$

c) Läs ut l ur ekv. ovan

$B = 0{,}750$ nT då $l = 1{,}26$ m

d)



$2\pi r \cdot B = \mu_0 I_{netto} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{B = 0}}$

22.44

En kvadratisk strömslinga med kantlängden 2,00 cm genomflyts av strömmen 0,200 A. Den befinner sig inuti en solenoid så att normalen till slingan är parallell med magnetfältet i solenoiden. Denna har 30 varv per cm och genomflyts av strömmen 15,0 A. Bestäm kraften på vardera sidan av strömslingan och bestäm det vridande moment som verkar på den.

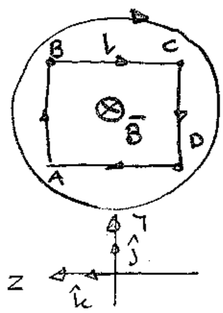
Lösning:

Inne i solenoiden $n = 3000\ \text{m}^{-1}$ Sett från ovan

$$\bar{B} = \mu_0 n I(-\hat{\imath}) =$$

$$= 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 3000\cdot 0{,}20\,(-\hat{\imath}) =$$

$$= -5{,}65\cdot 10^{-2}\ \text{T}\ (\hat{\imath})$$



$\odot\ x$

AB-sidan: $$(\bar{F}_B)_{AB} = I\,\bar{l}\times\bar{B} = I\,l\,\hat{\jmath}\times\bar{B} = 0{,}200\cdot 2{,}00\cdot 10^{-2}\cdot(-5{,}65\cdot 10^{-2})\cdot$$

$$\cdot\,\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = 2{,}26\cdot 10^{-4}\ \text{N}\ \hat{k}$$

$$\leftarrow (\bar{F}_B)_{AB}$$

På samma sätt ger varje sida av kvadraten en kraft från centrum som är $2{,}26\cdot 10^{-4}$ N

$\Rightarrow$ momentet $= 0$

Med storheten magnetiskt moment $\bar{\mu} \equiv I\bar{A}$

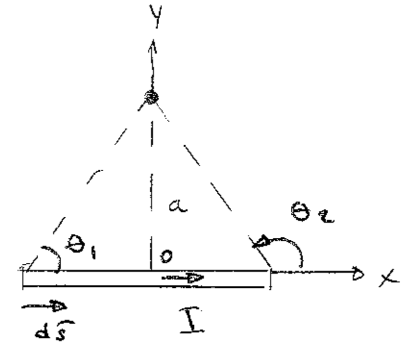
$$\bar{\mu} = 2{,}00\cdot 2{,}00\cdot 10^{-2}\ \hat{\imath}$$

$$\bar{\tau} = \bar{\mu}\times\bar{B} = \mu\,\hat{\imath}\times B\,\hat{\imath} = 0$$

22.52

Betrakta ett tunt, rakt trådsegment som genomflyts av en konstant ström I.
Trådsegmentet är placerat som framgår av figuren.

a. Använd Biot-Savarts lag och bestäm magnetfältet i punkten P.
b. Antag att vi i stället har en oändligt lång tråd och använd Amperes lag för att ta fram magnetfältet i P.

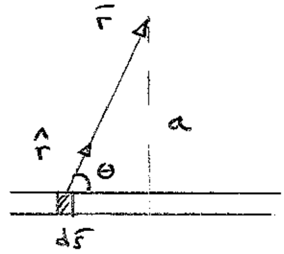


Lösning:

Biot-Savarts lag: $d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I \, d\bar{s} \times \bar{r}$

här $d\bar{s} = \hat{i}\, dx$

$|d\bar{s} \times \hat{r}| = dx \cdot \sin\theta$



$\therefore \; dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \cdot \sin\theta}{r^2}$

men $\quad a = r \cdot \sin\theta \Rightarrow r = \frac{a}{\sin\theta} \quad$ och $\quad x = -r \cdot \cos\theta =$

$$= -\frac{a}{\sin\theta} \cdot \cos\theta$$

$$\Rightarrow dx = d\left[\left(-\frac{a \cdot \cos\theta}{\sin\theta}\right)\right] = -a\,d\theta \left[(-\sin\theta)(\sin\theta)^{-1} + \right.$$

$$\left. + \cos\theta \cdot \cos\theta \frac{1}{\sin^2\theta}\right] =$$

$$= a\,d\theta \left[1 + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right] = a\,d\theta \left[\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right] = \frac{a \cdot d\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore \; dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a \cdot d\theta}{\sin^2\theta} \sin\theta \frac{1}{\frac{a^2}{\sin^2\theta}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta \cdot d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

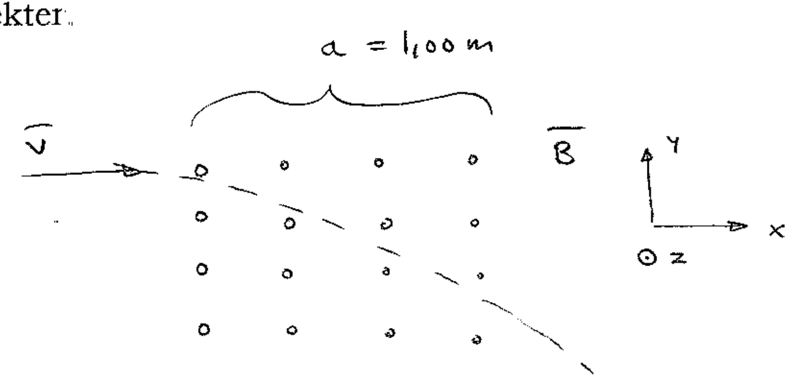
22.58

Protoner som har en kinetisk energi som är 5,00 MeV rör sig i positiv x-led och kommer in i ett magnetfält **B** = 0,050 **k** T riktat ut från papperet och som har detta värde i intervallet x = 0 till x = 1,00 m.

a. Bestäm y-komponenten av protonernas rörelsemängd när de lämnar magnetfältet.

b. Bestäm vinkeln α mellan den ursprungliga hastigheten och hastigheten när protonstrålen kommer ut ur området med magnetfält. Bortse från relativistiska effekter.

Lösning:



$$\overline{F_B} = q\,\bar{v} \times \overline{B}$$

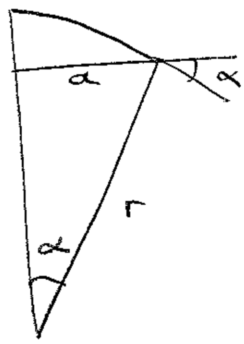
$$\perp \bar{v}$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB}$$

Ursprungshastighet: $K = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}}$ $(= 3{,}1 \cdot 10^7 \text{ m/s})$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{2Km}}{qB} \quad (= 6{,}46 \text{ m})$$



$$\sin\alpha = \frac{a}{r}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \underline{\underline{8{,}90^\circ}}$$

$$p_Y = -mv \cdot \sin\alpha =$$

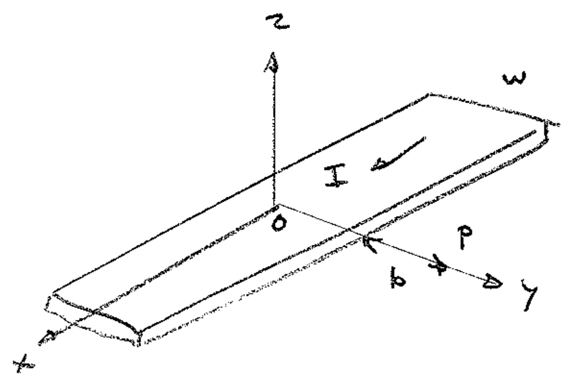
$$= -1{,}67 \cdot 10^{-27} \cdot 3{,}1 \cdot 10^{7} \cdot \sin 8{,}90^\circ =$$

$$= \underline{\underline{-8{,}00 \cdot 10^{-21} \text{ kgm/s}}}$$

22.63

En mycket lång, tunn metallfolie med bredden w genomflyts av en ström I i dess längdriktning. Bestäm magnetfältet i punkten P i figuren.

Lösning:

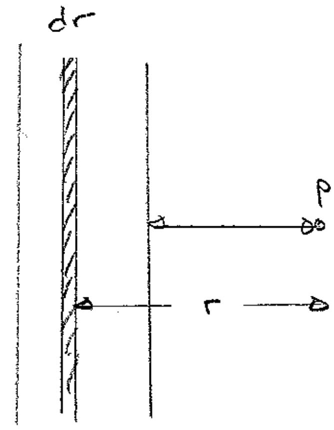


Bidrag från en remsa med bredd dr på avst. r från P.

$$dB = \frac{\mu_0 \, dI}{2\pi r}$$

$$dI = I \frac{dr}{w}$$

Sett från ovan.



$$B = \int dB = \int_b^{b+w} \frac{\mu_0 I \, dr}{2\pi w r} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln \frac{b+w}{b} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi w} \ln\left(1 + \frac{w}{b}\right)$$

$\bar{B} \parallel \hat{z}$ i punkten P.