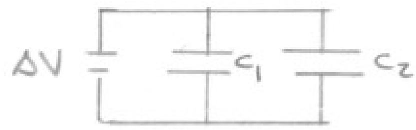
20.49

Två kondensatorer med kapacitanserna 25,0 mikrofarad och 5,00 mikrofarad parallellkopplas och laddas upp med hjälp av en 100-volts spänningskälla.
Rita kretsen och beräkna den totala energin som är lagrad i de två kondensatorerna.
Hur stor skulle potentialskillnaden kondensatorerna om de hade kopplats i serie om de skulle innehålla lika mycket energi som i det föregående fallet?

Lösning:

Parallellkoppling: $\Delta V = 100\ V$

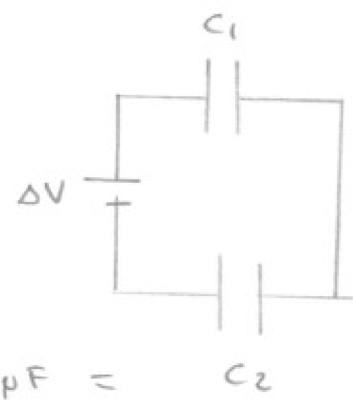


$$C_p = C_1 + C_2 = (25{,}0 + 5{,}00)\ \mu F = 30{,}0\ \mu F$$

Potentiell energi i kondensatorn: $U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 =$

$$= \frac{1}{2}\, 30{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 100^2\ J = \underline{\underline{0{,}150\ J}}$$

Seriekoppling:



$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\Rightarrow C_s = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{25{,}0 \cdot 5{,}00}{30{,}0}\ \mu F =$$

$$= 4{,}17\ \mu F$$

$$U = \frac{1}{2} C \Delta V^2 \rightarrow \Delta V = \sqrt{\frac{2U}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}150}{4{,}17 \cdot 10^{-6}}}\ V =$$

$$= 1830\ V = \underline{\underline{1{,}83 \cdot 10^3\ V}}$$

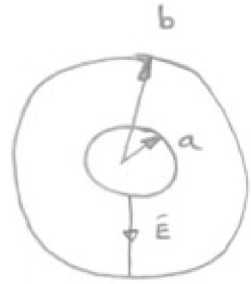
20.38

En sfärisk kondensator består av ett yttre sfäriskt ledande skal med radie b och laddning –Q samt ett inre med radien a och laddningen +Q.
Bestäm kondensatorn kapacitans.
Hur stor är kapacitansen för stora värden på b?

Lösning:

Bestäm ΔV!

Fältet mellan a och b ges med hjälp av Gauss' sats.



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

$$4\pi r^2 \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = k_e \frac{Q}{r^2}$$

$$V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{s} = \left[\bar{E} \parallel d\bar{s} \right] = -\int_a^b E \cdot dr =$$

$$= -\int_a^b k_e \frac{Q}{r^2} \cdot dr = k_e Q \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right] =$$

$$= -k_e Q \frac{b-a}{ab}$$

$$\Rightarrow V_a - V_b = k_e Q \frac{b-a}{ab} = \Delta V$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{k_e Q \frac{b-a}{ab}} = \frac{ab}{k_e(b-a)}$$

b stort

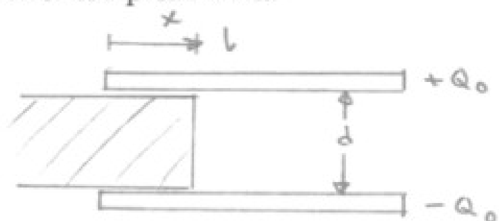
$$\Rightarrow C \approx \frac{a}{k_e}$$

20.76

Två kvadratiska plattor vardera med sidan l är parallella med varandra såsom figuren visar. Avståndet mellan dem är d (d<<l). Plattorna är uniformt laddade med $+Q_0$ och $-Q_0$. Ett metallblock med längden l och en tjocklek som är marginellt mindre än d förs in sträckan x mellan plattorna.

a. Beräkna den lagrade energin som funktion av x.
b. Bestäm kraften på metallblocket.
c. Arean hos framkanten på metallblocket är ungefär ld. Bestäm kraft per ytenhet på framkanten.
d. Hur stor är energitätheten i det elektriska fältet mellan plattorna.

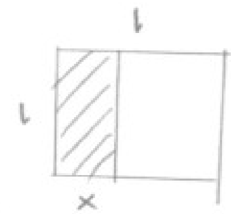
Lösning:



För metallen gäller $K \to \infty$

⇒ Den del som är fylld med metall gäller.

$$C = \frac{K\epsilon_0 (\overbrace{lx}^{\text{area}})}{d} \to \infty$$



lagrad energi $U = \dfrac{Q^2}{2C} = 0$

För den ofyllda delen gäller

$$C = \frac{\epsilon_0 l(l-x)}{d}$$

laddningen på den delen (homogen) $Q = Q_0 \dfrac{l(l-x)}{l^2} =$

$$= Q_0 \frac{l-x}{l}$$

a) lagrad energi

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{\left[(l-x)\frac{Q_0}{l}\right]^2}{2\epsilon_0 l \frac{l-x}{d}} = \frac{Q_0^2 (l-x) d}{2\epsilon_0 l^3}$$

b) kraft på metallblocket

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left[\frac{Q_0^2 (l-x) d}{2\epsilon_0 l^3}\right] = +\frac{Q_0^2 d}{2\epsilon_0 l^3} \rightarrow$$

U minskar då x ökar.

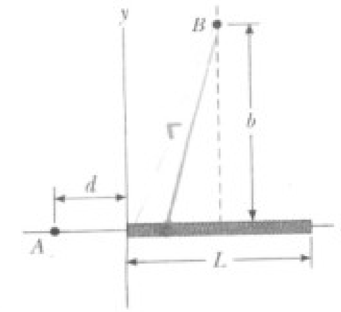
c) $\dfrac{F}{dl} = \dfrac{Q_0^2}{2\epsilon_0 l^4}$

d) energitäthet $u = \dfrac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \dfrac{1}{2}\epsilon_0\left(\dfrac{\sigma}{\epsilon_0}\right)^2 = \dfrac{1}{2}\epsilon_0\left(\dfrac{Q_0}{\epsilon_0 l^2}\right)^2 =$

$$= \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 l^4} \quad \left[= \frac{U}{(l-x)\cdot l \cdot d}\right]$$

20.

26. For the arrangement described in Problem 20.25, calcula the electric potential at point B that lies on the perpendic ular bisector of the rod a distance b above the x axis.



Lösning:

$$\lambda = \alpha x \qquad \alpha > 0$$

$$V = k_e \int \frac{dq}{r} \qquad r^2 = b^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2$$

$$dq = dx \cdot \lambda = \alpha x \cdot dx$$

$$\Rightarrow V = k_e \int_0^L \frac{\alpha \cdot x \cdot dx}{\left[b^2 + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2\right]^{1/2}}$$

$$x = 0 \Rightarrow z = \frac{L}{2}$$
$$x = L \Rightarrow z = -\frac{L}{2}$$

Inför $z = \frac{L}{2} - x \quad \Rightarrow dx = -dz \quad$ och $\quad x = \frac{L}{2} - z$

$$\Rightarrow V = k_e \alpha \int \frac{\left(\frac{L}{2} - z\right)(-dz)}{(b^2 + z^2)^{1/2}} = -\frac{k_e \alpha L}{2} \int \frac{dz}{(b^2 + z^2)^{1/2}} +$$

$$+ k_e \alpha \int \frac{z \cdot dz}{(b^2 + z^2)^{1/2}}$$

$\frac{1}{(b^2+z^2)^{1/2}}$ primitiv funktion $\ln\left[z + \sqrt{z^2 + b^2}\right]$

$\frac{z}{(b^2+z^2)^{1/2}}$ —"— $(b^2 + z^2)^{1/2}$

$$\Rightarrow V = -\frac{k_e \alpha L}{2}\left[\ln\left(z + \sqrt{z^2 + b^2}\right)\right]_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}} + k_e \alpha \left[\sqrt{b^2 + z^2}\right]_{\frac{L}{2}}^{-\frac{L}{2}}$$

20.26 (Forts)

$$V = -\frac{L k_e \alpha}{2} \cdot \ln\left[\frac{-\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+b^2}}{\frac{L}{2}+\sqrt{\frac{L^2}{4}+b^2}}\right] +$$

$$+ k_e \alpha \left[\left[b^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] - \left[b^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right]\right] =$$

$$= \underbrace{-\frac{k_e \alpha L}{2} \ln\underbrace{\left[\frac{\sqrt{b^2+\frac{L^2}{4}}-\frac{L}{2}}{\sqrt{b^2+\frac{L^2}{4}}+\frac{L}{2}}\right]}_{<0}}_{>0}$$

22.

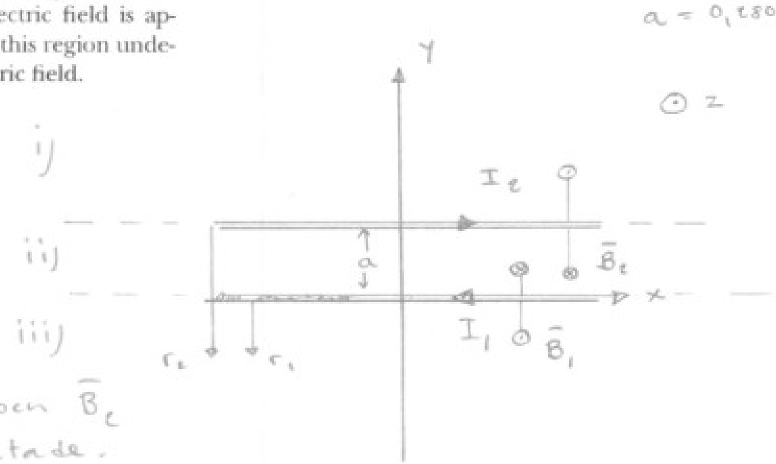
30 One very long wire carries current 30.0 A to the left along the x axis. A second very long wire carries current 50.0 A to the right along the line (y = 0.280 m, z = 0). (a) Where in the plane of the two wires is the total magnetic field equal to zero? (b) A particle with a charge of $-2.00\ \mu C$ is moving with a velocity of $150\hat{\mathbf{i}}$ Mm/s along the line (y = 0.100 m, z = 0). Calculate the vector magnetic force acting on the particle. (c) A uniform electric field is applied to allow this particle to pass through this region undeflected. Calculate the required vector electric field.

Givet: $I_1 = 30{,}0\ A \quad (-\hat{x})$

$I_2 = 50{,}0\ A \quad (\hat{x})$

$a = 0{,}280\ m$

$\odot\ z$



Lösning.

Lång rak ledare

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

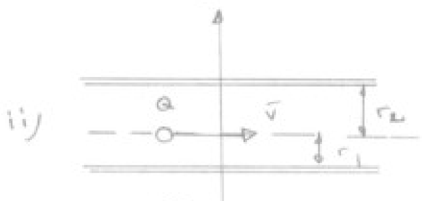
a) Vi söker en linje där $\bar{B}_1$ och $\bar{B}_2$ är lika stora och motriktade.

Mellan ledarna är fälten parallella. Vi söker en linje som ligger utanför ledarna. Antingen i område i eller iii.

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2} \Rightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{50}{30} > r_2 > r_1 \quad \therefore \text{omr. iii)}$$

$$r_2 = (r_1 + a) \qquad \frac{r_1 + a}{r_1} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} r_1 = a \Rightarrow r_1 = \frac{3}{2} a = \underline{\underline{0{,}420\ m}}$$

b)



$Q = -2{,}00\ \mu C$

$\bar{v} = 150 \cdot 10^6\ \hat{\imath}\ m/s$

$\bar{F} = Q\, \bar{v} \times \bar{B}$

Fälten $\bar{B}_1$ och $\bar{B}_2$ parallella i ii) $(-\hat{z})$

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2}\right)(-\hat{z}) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\left(\frac{30{,}0}{0{,}100} + \frac{50{,}0}{0{,}180}\right)(-\hat{z})$$

$r_1 = 0{,}100\ m$

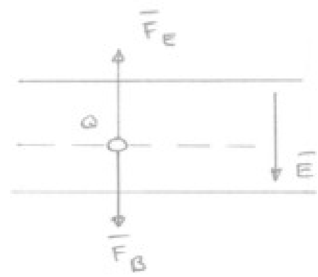
$r_2 = 0{,}180\ m$

$$= 1{,}16 \cdot 10^{-4}\ T\ (-\hat{z})$$

$$\bar{F} = (-2{,}00 \cdot 10^{-6})\ 150 \cdot 10^6 \cdot 1{,}16 \cdot 10^{-4} \underbrace{\left[\hat{\imath} \times (-\hat{z})\right]}_{+\hat{\jmath}} = \underline{\underline{3{,}47 \cdot 10^{-2}\ N\ (-\hat{\jmath})}}$$

c) Ingen avlänkning.

$-\bar{F}_E = \bar{F}_B$



$F_E = QE$

$$\Rightarrow E = \frac{F_E}{Q} = \frac{F_B}{Q} = \frac{3{,}47 \cdot 10^{-2}}{2{,}00 \cdot 10^{-6}}\ N/C$$

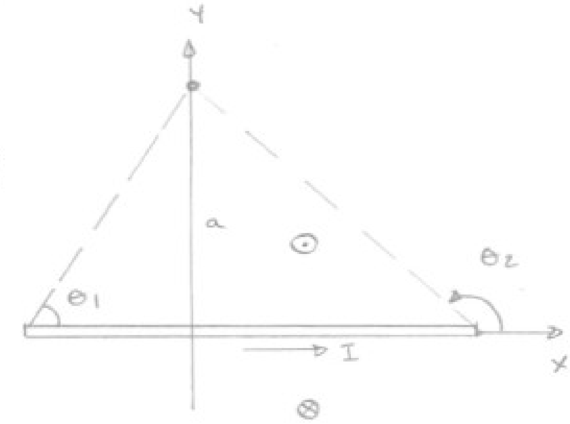
$$= 1{,}73 \cdot 10^4\ N/C \quad \downarrow \bar{E}$$

22.52

52. Consider a thin, straight wire segment carrying a constant current I and placed along the x axis as shown in Figure P22.52. (a) Use the Biot–Savart law to show that the total magnetic field at the point P, located a distance a from the wire, is

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

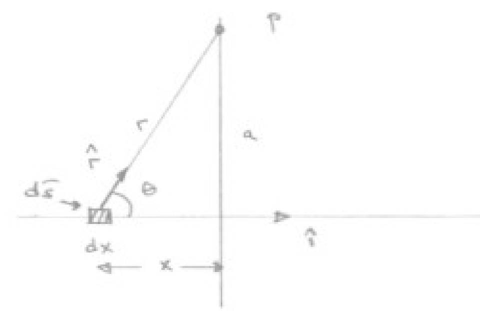
(b) Assuming that the wire is infinitely long, show that the result in part (a) gives a magnetic field that agrees with that obtained by using Ampère's law in Example 22.7.



Biot-Savarts lag:

$$d\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\bar{s}\times\hat{r}}{r^2}$$

$d\bar{s} = dx\,\hat{i}$ $\qquad |d\bar{s}\times\hat{r}| = dx\cdot\sin\theta$



$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{dx\cdot\sin\theta}{r^2}$$

i form av dx.

Tre variabler: x, θ och r.

Uttryck x och r i θ!

$\underline{r}$: $\quad r\cdot\sin\theta = a \Rightarrow r = \dfrac{a}{\sin\theta}$

$\underline{dx}$: $\quad \tan\theta = \dfrac{a}{x} \Rightarrow x = a\cdot\cot\theta \Rightarrow dx = a\cdot d\theta\,\dfrac{1}{\sin^2\theta}$

$$\therefore\ dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{a\cdot d\theta\,\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\sin\theta}{a^2\frac{1}{\sin^2\theta}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\sin\theta\cdot d\theta$$

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\cdot d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\Big[-\cos\theta\Big]_{\theta_1}^{\theta_2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}}$$

b) Oändligt lång ledare: $\theta_1 \to 0$, $\theta_2 \to \pi$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\overbrace{\Big[\cos 0 - \cos\pi\Big]}^{=2} = \underline{\underline{\frac{\mu_0 I}{2\pi a}}}$$