Elektriska och magnetiska fält.

ELEKTRISKA KRAFTER OCH ELEKTRISKA FÄLT:

Egenskaper hos elektriska laddningar

Redan tidigt hade mänskligheten klart för sig att det fanns två typer av elektriska laddningar. Dessa gav namnen positiva och negativa laddningar. Man har ännu inte upptäckt någon mer form av laddning.

Man har dessutom funnit att nettoladdningen i ett isolerat system bevaras.

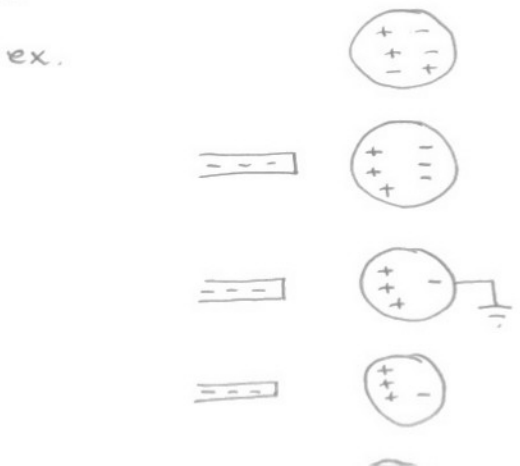
De material som vi kommer i kontakt med i vardagslivet innehåller såväl positiva som negativa laddningar. De positiva utgörs av protoner och de negativa utgörs av elektroner. En kubikmeter av ett fast ämne innehåller ungefär 10^{28} atomer, vilket innebär att även ett litet sandkorn eller en liten flisa av metall innehåller en oerhörd mängd laddningar. När det gäller transport av laddning spelar elektronerna den överlägset viktigaste rollen. Elektronens laddning e är 1,609 10^{-19} C (eller As). Grundenheten i SI-systemet är C. 1 C är en fantastiskt stor laddning. Kraftverkan mellan två laddningar som vardera har laddningen 1 C är enorm.

Isolatorer och ledare

Man kan dela in material i två huvudklasser; isolatorer och ledare. Grovt uttryckt kan man säga att laddningarna i en isolator är bundna, medan det i ledare finns elektroner som har relativt stor frihet att röra sig. Gränsen mellan isolatorer och ledare är flytande. Ledningsegenskaperna beror bland annat av temperaturen. Halvledare är en kategori av isolatorer, som knappast inte leder elektricitet alls vi låg temperatur, medan den elektriska ledningsförmågan är mycket större vid rumstemperatur.

Uppladdning genom induktion

Uppladdning av ett objekt genom induktion kräver inte kontakt med det objekt som inducerar laddningen.

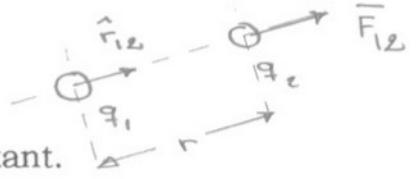


Coulombs lag

Experimentellt fann man tidigt att kraftverkan mellan två laddningar beror av de båda laddningarnas storlek, avståndet mellan dem samt av de elektriska egenskaperna hos det som finns mellan de båda laddningarna.

Om mediet mellan två laddningar är vakuum kan detta skrivas med hjälp av Coulombs lag

$$\bar{F}_{12} = k_e \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$



Där $k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8{,}99 \cdot 10^9$ N m^2/C^2 = Coulombs konstant.

$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \ \ 10^{-12}$ C^2/N m^2 = permeabiliteten i vakuum

Tänk på att kraften $\mathbf{F}_e$ är en vektor och att Newtons andra lag gäller. Det innebär att om laddningen 1 påverkas av kraften $\mathbf{F}_{12}$ från partikel 2, så påverkas partikel 2 av kraften $-\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12}$ från partikel 1.

Dessutom gäller att om partikel 1 påverkas av krafter från flera laddningar att

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{41} + \ldots\ldots$$

Elektriska fält

Analogt med hur vi gick tillväga när vi studerade krafter i gravitationsfältet där styrkan av detta beskrivs av tyngdaccelerationen g definierat av sambandet

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}_g / m_0$$

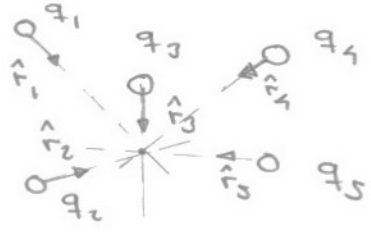
Nu definierar vi ett elektriskt fält $\mathbf{E}$ enligt

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_e / q_0$$

där $\mathbf{F}_e$ är den kraft som verkar på testladdningen q_0. Testladdningen antas vara så liten att den inte stör den laddningsfördelning som åstadkommer det elektriska fältet. Testladdningar är alltid positiva.

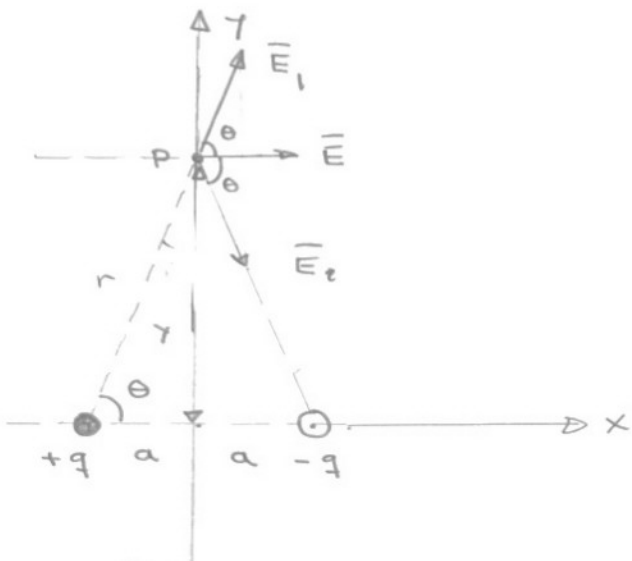
För att beräkna det elektriska fältet i en viss punkt utnyttjar vi sambandet

$$\bar{E} = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$



Det elektriska fältet från en dipol:

En elektrisk dipol består av två punktladdningar q och –q som befinner sig på avståndet 2a. (Neutrala atomer och molekyler uppför sig som dipoler när de placeras i ett elektriskt fält.)



Elektriska fältet på avståndet y på mittpunktsnormalen:

$\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$

$|\bar{E}_1| = |\bar{E}_2| = k_e \frac{q}{r^2} =$

$= k_e \frac{q}{y^2 + a^2}$

$$|\bar{E}| = 2 k_e \frac{q}{y^2 + a^2} \cos\theta$$

men $\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$

$$\Rightarrow |\bar{E}| = 2 k_e \frac{q}{y^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} =$$

$$= k_e \frac{2qa}{(y^2 + a^2)^{3/2}}$$

om $y >> a$ dvs på stort avstånd från dipolen

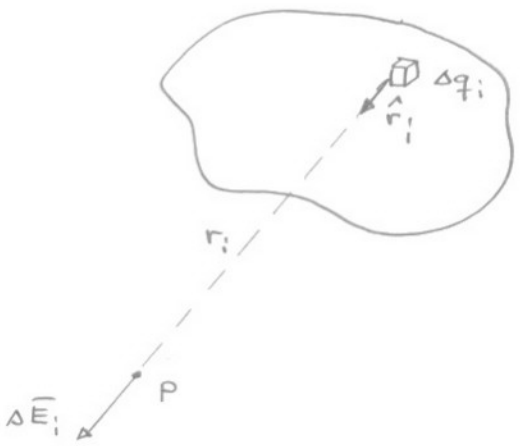
$$|\bar{E}| \approx k_e \frac{2qa}{y^3}$$

snabbare avklingning än $1/r^2$

om vi går ut längs x-axeln finner man att $|\bar{E}|$ avklingar som $1/x^3$ om avståndet är tillräckligt stort

Elektriskt fält från en kontinuerlig laddningsfördelning:

$$\Delta \bar{E}_i = k_e \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$



$$\bar{E} = \lim_{\Delta q_i \to 0} k_e \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i = k_e \int \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

hela laddnings-fördelningen

Om laddningen Q är uniformt fördelad över en volym V definierar man <u>laddningstäthet-heten</u> ρ enligt

$$\rho \equiv \frac{Q}{V} \qquad (\text{enhet } C/m^3)$$

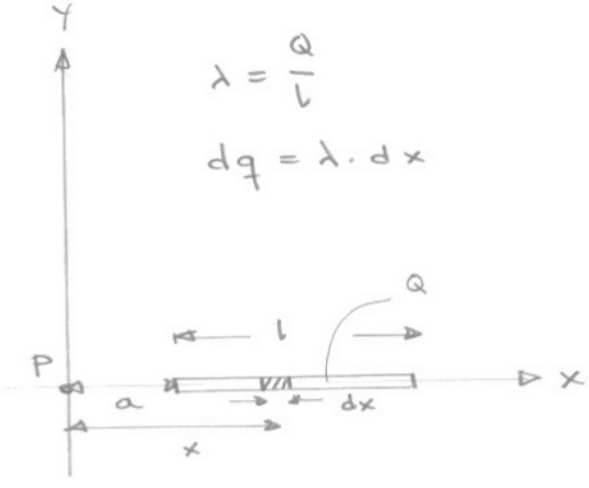
Om Q är uniformt fördelad över en yta A definierar man <u>ytladdningstätheten σ</u> enligt

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A} \qquad (\text{enhet } C/m^2)$$

Om Q är uniformt fördelad längs en linje med längden l definierar man den <u>linjära laddningstätheten λ</u> enligt

$$\lambda \equiv \frac{Q}{l} \qquad (\text{enhet } C/m)$$

Elektriska fältet från en laddad stav:
(längs stavens längdriktning)



$$\lambda = \frac{Q}{l}$$

$$dq = \lambda \cdot dx$$

Bidrag till E från laddningen inom dx:

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2} = k_e \frac{\lambda \cdot dx}{x^2}$$

Totalt:

$$E = \int_a^{l+a} k_e \lambda \frac{dx}{x^2} = k_e \lambda \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{l+a} =$$

$$= k_e \lambda \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right) = k_e \frac{Q}{l} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{l+a} \right) =$$

$$= k_e Q \frac{l+a-a}{l \cdot a (l+a)} = \frac{k_e Q}{a(l+a)}$$

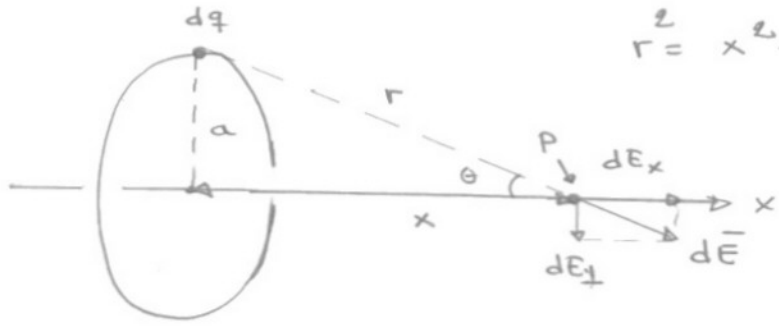
På stort avstånd ($a >> l$) gäller alltså

$$E \approx k_e \frac{Q}{a^2}$$

dvs uppförandet blir detsamma som om det hade varit en punktladdning.

Elektriska fältet från en uniform ring med laddning:

Vi undersöker fältet i punkter längs x-axeln:



$r^2 = x^2 + a^2$

$$dE = k_e \frac{dq}{r^2}$$

$$dE_x = dE \cdot \cos\theta = k_e \frac{dq}{r^2} \frac{x}{r} = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \cdot dq$$

Av symmetriskäl kommer summan av alla $dE_\perp$ att bli noll. Det totala fältet kommer att vara parallellt med x-axeln.

$$E_x = \int \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}} dq = \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}} \int dq =$$

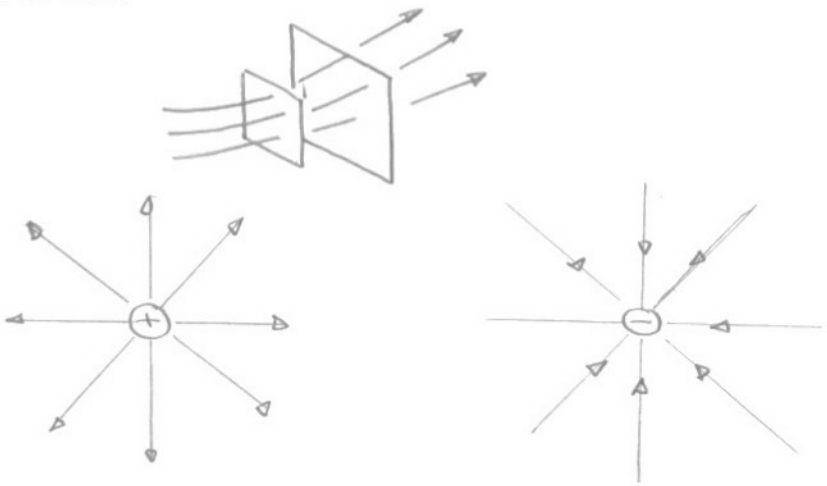
$$= \frac{k_e x}{(x^2+a^2)^{3/2}} Q$$

$$x = 0 \Rightarrow E_x = 0$$

$$x >> a \Rightarrow E_x \approx \frac{k_e Q}{x^2}$$

Elektriska fältlinjer:

Det är bekvämt att åskådliggöra det elektriska fältet genom att rita fällinjer som pekar i samma riktning som det elektriska fältet. Man brukar också markera variationer i det elektriska fältet styrka genom att rita fältlinjerna tätt där E är stort och glesare där E är litet.



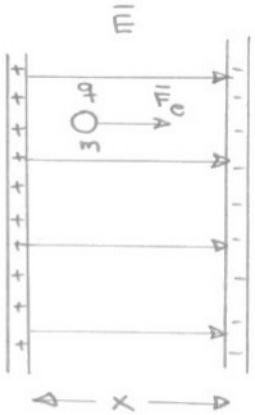
Laddade partiklars rörelse i uniforma elektriska fält:

$$\bar{F}_e = q\bar{E} = m\bar{a}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = \frac{q\bar{E}}{m}$$

$q > 0 \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{E}$

$q < 0 \Rightarrow \bar{a} \parallel -\bar{E}$



Från mekaniken: $v_f^2 - v_i^2 = 2a(x_f - x_i)$

med $v_i = 0$ får vi
$x_i = 0$

$$v_f^2 = 2a(x_f - x_i) = 2ax_f =$$

$$= 2\frac{qE}{m}x_f$$

Rörelseenergi efter sträckan x

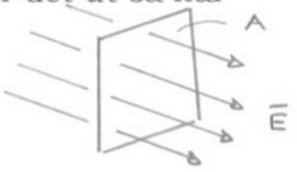
$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}m \cdot 2\frac{qE}{m} \cdot x = qEx$$

Elektriskt flödet ϕ

Det elektriska flödet genom en viss yta är proportionellt mot det antal flödeslinjer som tränger igenom en yta.

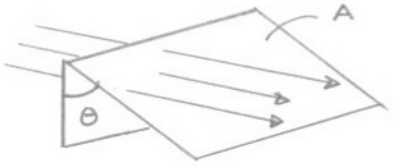
Om det elektriska fältet är homogent och ytan är vinkelrät mot fältlinjerna (d v s normalen till ytan är parallell med fältlinjerna) ser det ut så här

$$\phi_E = E\,A$$



Om fältet är homogent och (den plana) ytan bildar vinkeln θ med fältlinjerna ges flödet av

$$\phi_E = E\,A\cos\theta$$



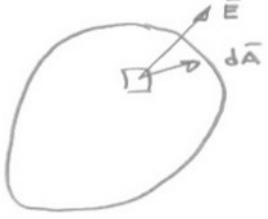
Om vi ville skulle vi kunna skriva detta som

$$\phi_E = \mathbf{E}\cdot\mathbf{A}$$

där **A** är en vektor vars belopp är lika med arean hos den plana ytan som är riktad längs ytans normal.

I det allmänna fallet där vare sig fältet är homogent eller ytan kan vi skriva

$$\phi_E = \int_{\text{ytan}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A}$$



För slutna ytor gäller

$$\phi_E = \oint_{\text{ytan}} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \oint_{\text{ytan}} E_n\,dA$$

där E_n är den komponent av det elektriska fältet som är parallell med normalen till ytan.

Notera att fältlinjer som går in i ytan ger ett negativt flöde, medan fältlinjer som går ut från ytan ger ett positivt flöde. I det första fallet är ju fält och normal antiparallella och i det andra är de parallella.

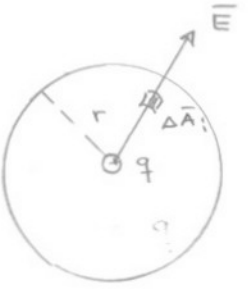
Gauss sats

I föregående avsnitt undersökte vi flödet genom ytor och tittade inte alls på vad det var för något som orsakade det elektriska fältet. Nu ska vi inkludera de laddningar som orsakar det elektriska fältet och kommer då fram till ett enkelt och användbart samband.

Först studerar vi en positiv laddning q som är placerad i mitten av en sfär vars radie är r. Detta innebär att fältlinjerna är riktade utåt och är vinkelräta mot ytan överallt.

$\bar{E} \parallel \Delta\bar{A}_i \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{E} \cdot \Delta\bar{A}_i = E\,\Delta A_i$



Nettoflödet genom (den tänkta) sfäriska ytan Φ_E ges av

$$\Phi_E = \oint E\,dA = EA$$

men på avståndet r från punktladdningen q gäller

$$E = \frac{k_e q}{r^2}$$

dessutom

$$A = 4\pi r^2$$

och

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \Phi_E = EA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}}$$

Nettoflödet är lika med den inneslutna laddningen dividerad med ϵ_0

Man kan visa att detta gäller också i det allmänna fallet

$$\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

där q_{in} är all inneslutan laddning

Tillämpningar av Gauss sats på symmetriska laddningsfördelningar.

Gauss sats är relativt enkel att använda när laddningsfördelningen har en hög grad av symmetri.

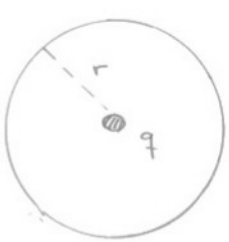
När det gäller valet av den yta som man ska utföra ytintegralen över bör man välja en yta som man kan dela upp i delytor, där dessa uppfyller en eller flera av villkoren:

1. Det elektriska fältet är konstant på varje delyta.
2. Skalärprodukten mellan **E** och d**A** kan skrivas som E dA eftersom **E** och d**A** är parallella på delytan.
3. Skalärproduken är noll eftersom **E** och d**A** är vinkelräta på delytan.
4. Fältet är noll på delytan.

Vi ska nu studera några enkla exempel:

ELEKTRISKA FÄLTET FRÅN EN PUNKTLADDNING.

Nu utgår vi från Gauss sats och härleder E från en punktladdning.



$$\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} =$$

$$= \oint E\, dA = \frac{q}{\epsilon_0}$$

men

$$\oint E \cdot dA = E \oint dA = E \cdot 4\pi r^2$$

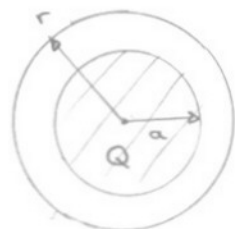
$$\therefore \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} = k_e \frac{q}{r^2}$$

SFÄRISK SYMMETRISK LADDNINGSFÖRDELNING.

En icke-ledande solid sfär har en uniform laddningstäthet ρ. Den totala laddningen är Q.

(A) Fältet utanför sfären: $r \geq a$



$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = E \oint dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \; E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \; E_{r \geq a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = k_e \frac{Q}{r^2}$$

(B) Fältet innanför sfären: $r \leq a$

$$q_{in} = \rho V' = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\oint E \cdot dA = E \int dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{in}}{\epsilon_0}$$

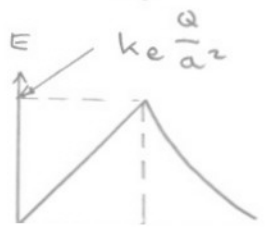
$$\Rightarrow \; E = \frac{q_{in}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

men $$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

vilket ger $$E_{r \leq a} = \frac{Q \cdot r}{\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot 3\epsilon_0} = k_e \frac{Q}{a^3} \cdot r$$

På randen: $r = a$ $\quad E_{r \geq a} = k_e \frac{Q}{a^2}$

$$E_{r \leq a} = k_e \frac{Q \cdot a}{a^3} = k_e \frac{Q}{a^2}$$

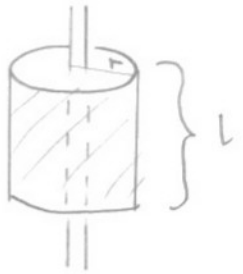


CYLINDRISK LADDNINGSFÖRDELNING.

Bestäm fältet på avståndet r från en smal stav som är oändligt lång och som har konstant laddning λ per längdenhet.

Innesluten laddning

$$q_{in} = \lambda \cdot l$$



Av symmetriskäl:

i) fältet $\perp$ staven

ii) cylindersymmetri.

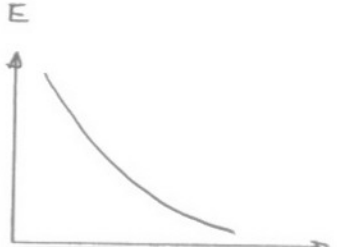
$$\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0}$$

I locket och botten av vår tänkta cylinder med längd l och radie r är $\bar{E} \perp d\bar{A}$ varför

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{A} = E \cdot 2\pi r \cdot l$$

$$\therefore \quad E \cdot 2\pi r \cdot l = \frac{\lambda \cdot l}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} = 2 k_e \frac{\lambda}{r}$$

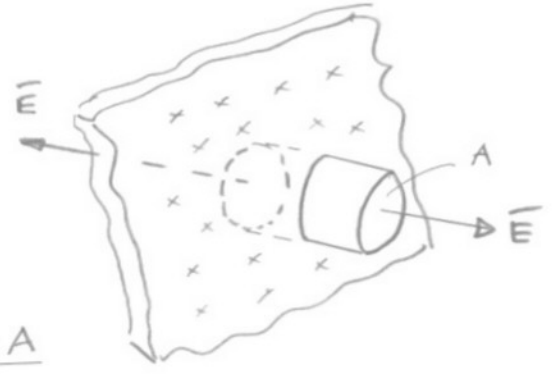


ICKE LEDANDE PLAN LADDNINGSFÖRDELNING.

Ytladdningstäthet = σ

Oändlig utsträckning

Endast nettoflöde genom den tänkta cylinderns lock och botten.

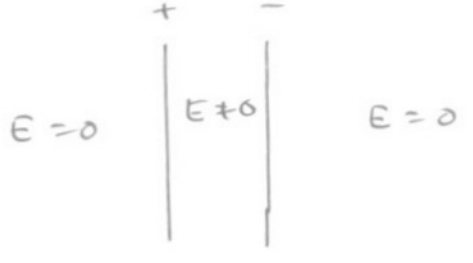


$$\Phi_E = 2EA = \frac{q_{in}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Det elektriska fältet är konstant, dvs oberoende av avstånd till planet.

Om man har två plan, ett med positiv och ett med negativ laddning, bredvid varandra förstärks det elektriska fältet i mellanrummet mellan plattorna. Där utanför tar de ut varandra.



Elektrisk potential och kapacitans.

Från mekaniken känner vi igen begreppet potentiell energi. Genom att utnyttja att den mekaniska energin bevaras om de enda närvarande krafterna är konservativa, förenklas ofta räkningarna. Man slipper bland annat räkna direkt med krafter. Krafternas inverkan finns inbakade i begrepp som potentiell energi.

Vi ska nu utvidga energibegreppet och ta fram den potentiella energin i närvaro av elektriska fält. Notera att Coulombkrafterna är konservativa. Vi kommer att skilja mellan den potentiella energi som en testladdning har i en viss punkt i ett elektriskt fält och den potential som det elektriska fältet ger upphov till i en viss punkt. Den senare är en egenskap hos fältet och oberoende av testladdningens storlek, medan den förra beror av såväl det elektriska fältets styrka som av testladdningens storlek.

POTENTIALSKILLNAD OCH ELEKTRISK POTENTIAL

När en testladdning q_0 placeras i ett elektriskt fält **E** blir kraften på testladdningen lika med q_0 **E**.

En infinitesimal förflyttning d**s** av testladdningen uträttar det elektriska fältet arbetet

$$dW = \mathbf{F}_e \cdot d\mathbf{s} = q_0 \, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Detta innebär att den potentiella energin U förändras enligt

$$dU = -dW = - q_0 \, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Om testpartiklen förflyttas mellan punkterna A och B blir förändringen av den potentiella energin

$$\Delta U_0 = U_B - U_A = -q_0 \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

Eftersom de närvarande krafterna är konservativa värdet av kurvintegralen mellan A och B oberoende av den exakta vägen mellan A och B.

Den potentiella energin som testpartikeln har beror såväl av q_0 som av **E**. I analogi med hur vi gjorde när vi introducerade begreppet elektriskt fältstyrka inför vi nu storheten elektrisk potential V (eller bara potential) med hjälp av sambandet

$$V = U / q_0$$

Som synes är potentialen bara beroende av **E** och oberoende av testladdningens storlek.

Potentialskillnaden (eller på svenska SPÄNNINGEN) $\Delta V = V_B - V_A$.

När en testladdning flyttas mellan punkterna A och B får vi

$$\Delta V = \Delta U/q_0 = -\int_A^B \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

Potentialen sätts till noll på något lämpligt ställe. Detta ställe kallas JORD. Vanligen sätter man potentialen till noll när laddningar befinner sig oändligt långt ifrån varandra. Med detta val kan vi skriva:

> *Den elektriska potentialen i en punkt är lika med det kvoten mellan det arbete som erfordras för att med en yttre kraft transportera en testladdning till punkten i fråga och testladdningen.*

Om vi sätter $V_A = 0$ i oändligheten får vi potentialen i en godtycklig punkt P med hjälp av sambandet:

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \mathbf{E}\, d\mathbf{s}$$

SI-enheten för elektrisk potential (energi/laddning) är J/C eller J/As. I dagligt tal VOLT (V). En vanlig enhet för elektrisk fältstyrka är V/m, vilket följer av ekvationen här ovan.

Om vi släpper loss en laddning som befinner sig i ett elektriskt fält kommer den att röra sig från hög potential till låg potential. Om potentialen ändras med – 1V uträttar det elektriska fältet ett arbete som är 1 J på laddningen.

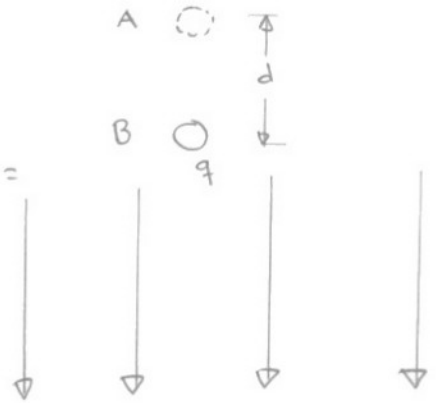
Jämför gärna med en sten som faller fritt på grund av inverkan av tyngdkraften. Då minskar dess potentiella energi när gravitationen uträttar arbete på den. Denna minskade potentiella energi resulterar i en ökad rörelseenergi hos stenen.

En energienhet som är vanlig bland annat när man talar om elektroner är elektronvolt (eV). 1 eV är ökningen av en elektrons rörelseenergi när den accelereras av elektriskt fält och får en ändring av potentialen med 1V.

$$1\ \text{eV} = 1{,}6\ 10^{-19}\ \text{J}$$

POTENTIALSKILLNAD I ETT UNIFORMT ELEKTRISKT FÄLT.

$$V_B - V_A = \Delta V = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} = \left[\bar{E} \parallel d\bar{s}\right] = -Ed$$



Det elektriska fältet pekar alltid i riktningen minskande potential

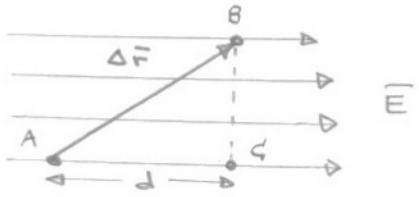
Ändring av potentiell energi hos laddningen q_0:

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 E d$$

När en positiv laddning rör sig i E-fältets riktning tappar systemet laddning/fält potentiell energi. Denna förlust kompenseras av ökad kinetisk energi.

När en negativ laddning rör sig i motsatt riktning till $\bar{E}$ förlorar systemet laddning/fält pot. energi.

Her allmänt



Potential:

$$\Delta V = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\bar{E}\int_A^B d\bar{s} =$$

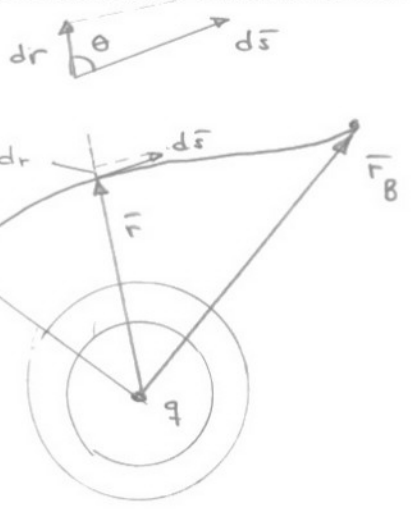
$$= -\bar{E} \cdot \Delta\bar{r}$$

Pot. energi:

$$\Delta U = q_0 \Delta V = -q_0 \bar{E} \cdot \Delta\bar{r} = -q_0 E d$$

Punkterna B och C befinner sig på en ekvipotentialyta.

ELEKTRISK POTENTIAL OCH ELEKTRISK POTENTIELL ENERGI ORSAKAD AV PUNKTLADDNINGAR.



en laddning:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

$$\bar{E} \cdot d\bar{s} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot d\bar{s} =$$

$$= k_e \frac{q}{r^2} ds \cdot \cos\theta$$

$ds \cdot \cos\theta$ är projektionen av $d\bar{s}$ på $\bar{r}$ dvs dr

$$\Rightarrow V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} k_e \frac{q}{r^2} dr = -k_e q \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} =$$

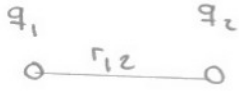
$$= k_e q \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right]$$

med $r_A = 0$ får vi $\quad V = k_e \frac{q}{r}$

flera laddningar: $\quad V = k_e \sum_i \frac{q_i}{r_i}$

Potentiella energin för två laddningar på avstånden r_{12} från varandra

$$U = q_1 V_2 = k_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$



$U > 0$ om q_1 och q_2 har samma tecken.
Yttre arbete krävs för att minska r_{12}

$U < 0$ om q_1 och q_2 har olika tecken

SAMBAND MELLAN ELEKTRISKT FÄLT OCH ELEKTRISK POTENTIAL.

$$\Delta V = -\int \bar{E} \cdot d\bar{s}$$

$$\therefore \quad dV = -\bar{E} \cdot d\bar{s}$$

1 dim

$$E_x = -\frac{dV}{dx}$$

allmänt

$$\bar{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

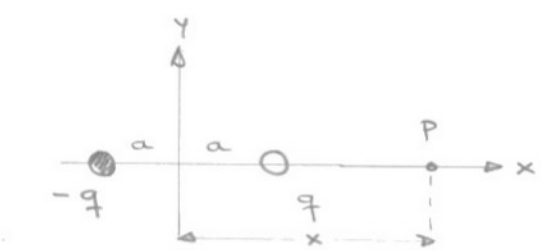
exempel:

$$V = 3x^2y + y^2 + yz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = -\dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2y + y^2 + yz) = -6xy \\ E_y = -3x^2 - 2y - z \\ E_z = -y \end{cases}$$

Dipol:

längs x-axeln



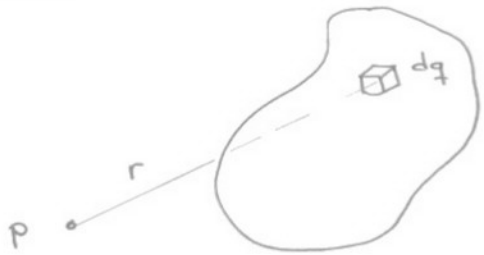
$$V = k_c \sum_i \frac{q_i}{r_i} = k_c\left(\frac{q}{x-a} + \frac{-q}{x+a}\right) = \frac{2k_c q a}{x^2 - a^2}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -2k_c q a \frac{\partial}{\partial x}(x^2-a^2)^{-1} = -2k_c q a \cdot 2x(x^2-a^2)^{-2}(-1) =$$

$$= \frac{4k_c q a x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$x >> a \Rightarrow E_x = \frac{4k_c q a}{x^3}$$

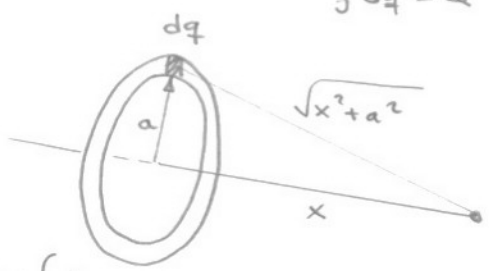
ELEKTRISK POTENTIAL ORSAKAD AV EN KONTINUERLIG LADDNINGSFÖRDELNING.



$$V = k_e \int \frac{dq}{r}$$

Potential orsakad av en uniformt laddad ring:

$$\int dq = Q$$



$$V = k_e \int \frac{dq}{r} =$$

$$= k_e \int \frac{dq}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k_e}{\sqrt{x^2+a^2}} \int dq =$$

$$= \frac{k_e Q}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -k_e Q \frac{d}{dx}(x^2+a^2)^{-1/2} =$$

$$= -k_e Q \left(-\frac{1}{2}\right)(x^2+a^2)^{3/2}(2x) =$$

$$= \frac{k_e Q x}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

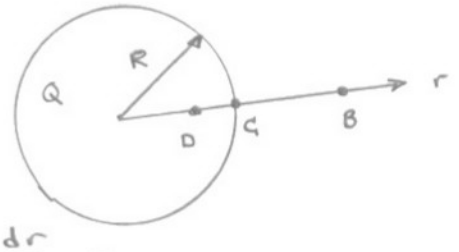
$x >> a$

$$\Rightarrow E_x \approx k_e \frac{Q}{x^2}$$

Potential orsakad av en uniformt laddad sfär: (isolator)

Utanför sfären:

(A) $r > R$ $\quad V = 0$ när $r = \infty$



$$E_r = k_e \frac{Q}{r^2} \qquad \bar{E} \parallel \bar{r}$$

$$V_B = -\int_{\infty}^{r} E_r \cdot dr = -k_e Q \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= k_e \frac{Q}{r}$$ (samma resultat som för en punktladdning i $r=0$)

Speciellt

$$V_C = k_e \frac{Q}{R}$$

Innanför sfären

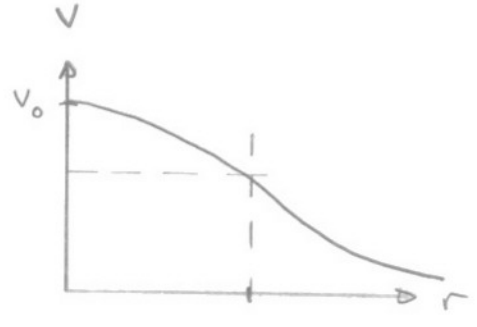
(B) $r < R$

$$E_r = k_e \frac{Q}{R^3} r$$

$$\Rightarrow V_D - V_C = -\int_{R}^{r} E_r \cdot dr = -\frac{k_e Q}{R^3} \int_{R}^{r} r \cdot dr =$$

$$= \frac{k_e Q}{2R^3}(R^2 - r^2)$$

men $\quad V_C = k_e \frac{Q}{R}$



$$\Rightarrow V_D = \frac{k_e Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

ELEKTRISK POTENTIAL ORSAKAD AV EN LADDAD LEDARE.

Laddningen samlas på ytan

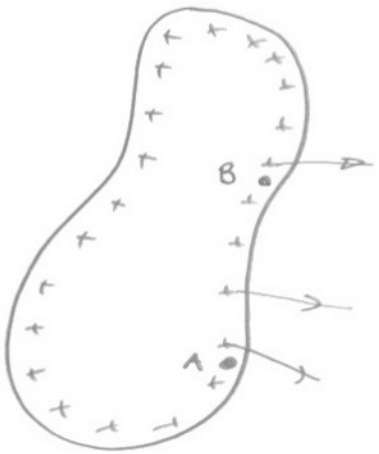
A och B ligger på ytan:

$$V_B - V_A = -\int_A^B \bar{E} \cdot d\bar{s} = 0$$

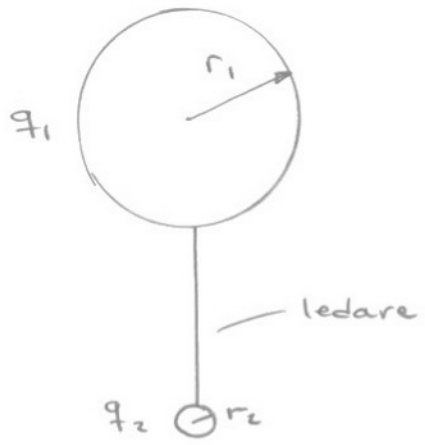
$\bar{E} \perp$ ytan.

$\bar{E} = 0$ inuti ledaren.

Ytladdningstätheten σ är inte uniform.



Modellsystem:



På ytan

$$V = k_e \frac{Q}{R}$$

$$\Rightarrow V_1 = k_e \frac{q_1}{r_1}$$

$$V_2 = k_e \frac{q_2}{r_2}$$

men $V_1 = V_2$ (ty kontakt via ledaren)

$$\Rightarrow \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2} \qquad \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{q_2}{4\pi r_2^2}}{\frac{q_1}{4\pi r_1^2}} = \frac{q_2}{q_1}\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_2}{r_1}\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$\therefore \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

liten radie $\Rightarrow$ stor laddn.-täthet

$\Rightarrow$ stort el. fält.

spetsverkan

KAPACITANS.

Vi ska studera en del komponenter som används i elektriska kretsar. Den första i raden är KONDENSATORN. Sådana används bland annat i elektriska filter.

En kondensator består vanligen av två ledare, exempelvis två melattplattor. Den ena ledaren har laddningen +Q och den andra laddningen –Q. Kondensatorns kapacitans C definieras som kvoten mellan laddningen Q och potentialskillnaden mellan de två ledarna. Vi ska se hur man räknar ut C för några typer av kondensatorer; plattkondensatorn och den cylindriska kondensatorn. Kapacitansen har alltså enheten coulomb per volt eller farad (F). Eftersom 1 coulomb är en mycket stor laddning så är 1 farad en mycket stor kapacitans. Praktiska kondensatorer har kapacitanser från mikrofarad till pikofarad. Som vi ska se beror kondensatorns kapacitans på dess geometriska utformning.

Plattkondensatorn:

En plattkondensator påstår av två parallella plattor med lika stora areor. De är separerade med avståndet d. Den ena plattan har laddningen +Q och den andra laddningen –Q. Laddningstätheten ges av Q/A. Om plattorna är tillräckligt nära varandra jämfört med arean kan vi anta att det elektriska fältet mellan plattorna är uniformt i mellanrummet och noll på alla andra ställen.

Tidigare har vi härlett att

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Vilket ger att

$$\Delta V = E d = \frac{Q d}{\epsilon_0 A}$$

Om vi sätter in detta i definitionsekvationen för kapacitans får vi:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q d}{\epsilon_0 A}} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

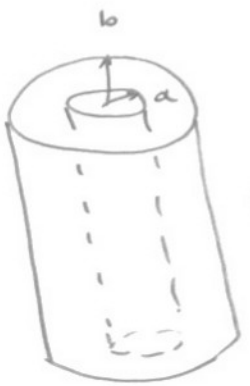
Som synes växer kapacitansen med arean A och minskar med avståndet d mellan plattorna.

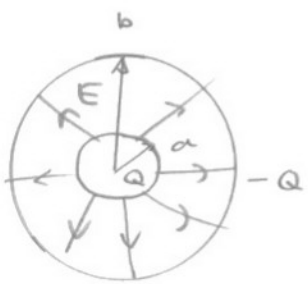
I figuren på sidan 659 syns illustreras hur kemisk energi i ett elektriskt batteri överförs till potentiell energi hos laddningarna i kondensatorn. Mer om detta senare.

Den cylindriska kondensatorn

Vi har härlett ett uttryck för hur det elektriska fältet ser ut utanför en oändligt lång ledare. När vi nu ska ta fram ett uttryck för kapacitansen för en cylinderkondensator bortser vi från randeffekter och använder dessa uttryck trots att vi nu inte har något som är oändligt långt.

$$V_b - V_a = -\int_a^b \bar{E} \cdot d\bar{s}$$





$$E = 2k_e \frac{\lambda}{r}$$

$$\Rightarrow V_b - V_a = -\int_a^b E_r\, dr = -2k_e\lambda \int_a^b \frac{dr}{r} =$$

$$= -2k_e\lambda \cdot \ln\frac{b}{a} \qquad \lambda = \frac{Q}{l}$$

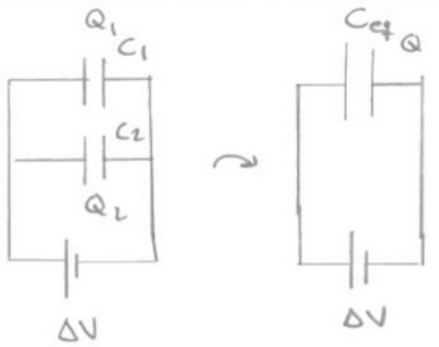
$$\Rightarrow \Delta V = 2k_e\lambda \cdot \ln\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{2k_eQ}{l}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{l}{2k_e\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{l} = \frac{1}{2k_e\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

KOMBINATION AV KONDENSATORER; PARALLELL OCH SERIELL KOPPLING.

Parallellkoppling:



$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$

$Q_1 + Q_2 = Q$

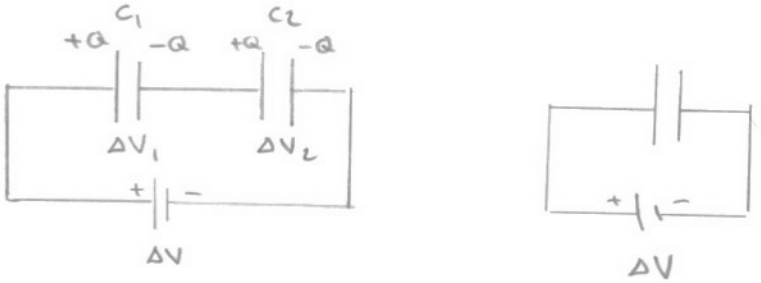
$Q = C_{eq} \cdot \Delta V$

$Q_1 = C_1 \cdot \Delta V$

$Q_2 = C_2 \cdot \Delta V$

$Q = (C_1 + C_2) \cdot \Delta V \quad \therefore \; C_{eq} = C_1 + C_2$

Seriekoppling:



$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$

$\Delta V = \frac{Q}{C_{eq}}$

$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$

$$\Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\rightarrow \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Vi har nu härlett parallell- och serfekoppl. för två kondensatorer. Genom att successivt lägga till kondensatorer inser en

Parallell koppl. $C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$

Serfekoppl. $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots$

ENERGI I EN LADDAD KONDENSATOR

Kondensatorer kan lagra energi. Om man skulle förbinda de två plattorna med en tråd skulle en ström flyta mellan dem ända tills de var oladdade.

För att härleda energin i en kondensator med laddningen Q och kapacitansen C gör vi enligt följande:
Antag att laddningen hos kondensatorn vid ett viss tillfälle är q och att då en yttre aktör tar en liten laddning dq och för över den från den platta som har laddningen –q till den som har laddningen +q. Potentialskillnaden mellan de båda plattorna är vid detta tillfälle ΔV.

Det arbete som den yttre aktören utför ges av

$$dW = \Delta V\, dq = (q/C)\, dq$$

Det totala arbetet som åtgår för att ladda kondensatorn från q = 0 till q = Q ges av:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{Q^2}{2C}$$

I verkligheten åstadkoms uppladdningen inte av ett mekaniskt arbete utan genom att kemisk energi i ett batteri görs om till elektrisk energi i kondensatorn.

Energin som är lagrad i en kondensator kan ses som att man lagrar energi genom att bygga upp ett elektriskt fält i kondensatorn. För en plattkondensator gäller

$$\Delta V = E\, d$$

Kapacitansen ges av

$$C = \varepsilon_0 A/d$$

Om vi sätter in detta i uttrycket ovan får vi:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2$$

Plattkondensatorns volym är A d, vilket gör att vi kan beräkna energitätheten d v s energiinnehållet per volymsenhet u = U/E d, vilket ger:

$$u = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon_0 E^2$$

Resultatet att energitätheten i ett elektriskt fält är proportionellt mot den elektriska fältstyrkan i kvadrat gäller allmänt, trots att vi här har härlett det för specialfallet plattkondensator.

KONDENSATORER MED DIELEKTRIKA.

Ett dielektrikum är ett isolerande material såsom gummi, glas eller vaxat papper för att ta några exempel på material som används i kondensatorer. Om ett sådant införs i mellanrummet i kondensatorn blir den elektriska fältstyrkan mindre och följaktligen även potentialskillnaden mellan plattorna. Detta beror på att laddningarna i ett dielektrikum skärmar det elektriska fältet från laddningarna på kondensatorplattorna.
Förmågan att skärma beskrivs av den relativa dielektricitetskonstanten κ (ofta betecknad ε_r). Värdet på κ är alltid större än noll för det som inte är vakuum. Papper har värdet 3,7, vatten har värdet 80, glas omkring 6. Se tabell på sidan 669 i läroboken.

Antag att man har en kondensator som har kapacitansen C_0 och som har laddningen Q_0 och där en voltmeter som mäter spänningen över kondensatorn, visar värdet ΔV_0. Om då man sätter in ett dielektrikum med relativa dielektricitetskonstanten κ sjunker potentialskillnaden

$$\Delta V = \Delta V_0 / \kappa$$

Vilket gör att kapacitansen multipliceras med κ.

$$C = \kappa C_0$$

Fördelen med att ha ett dielektrikum i kondensatorn ger följande fördelar:

- Kapacitansen ökar
- Den maximala spänningen som kan läggas över kondensatorn ökar
- Den mekaniska stabiliteten ökar