# MAGNETISKA FÄLT OCH MAGNETISKA KRAFTER.

En magnet har två polen; en nordpol och en sydpol. Namnen är kommer av den ena änden av en magnet dras mot den geografiska nordpolen medan den andra dras mot den geografiska sydpolen.
Ingen har någonsin lyckats bevisa att de har observerat en ensam nordpol eller en ensam sydpol.

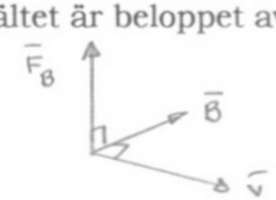
Till en början kommer vi att studera vilken inverkan ett "färdigt" magnetfält har på en eller flera laddningar. I steg två kommer vi att studera hur magnetfält uppkommer.

## Magnetiska fältet

Laddningar q som rör sig med hastigheten $\mathbf{v}$ i ett magnetfält, vars styrka bestäms av den magnetiska fältstyrkan $\mathbf{B}$, påverkas av en kraft $\mathbf{F}_B$.

Experiment har givit följande egenskaper

- $\mathbf{F}_B$ är proportionell mot såväl q som v.
- När en laddad partikel rör sig parallellt med det magnetiska fältet är kraften noll.
- När hastigheten bildar en vinkel med det magnetiska fältet är $\mathbf{F}_B$ vinkelrät mot såväl $\mathbf{B}$ är som $\mathbf{v}$.
- Den magnetiska kraften på laddningen q har motsatt riktning jämfört den som verkar på laddningen –q.
- Om hastigheten bildar vinkeln θ med det magnetiska fältet är beloppet av den magnetiska kraften proportionellt mot sin θ.




Detta kan vi sammanfatta med formeln

$$\mathbf{F}_B = q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Tredimensionaliteten i detta uttryck gör det nödvändigt att rita tredimensionella figurer. Om exempelvis $\mathbf{v}$ och $\mathbf{B}$ ligger i papperets plan, är $\mathbf{F}_B$ vinkelrät mot detta plan.
Om $\mathbf{F}$ är riktad upp från pappret betecknas detta med $\odot$

Om $\mathbf{F}$ är riktad ned i bordet betecknas detta med $\otimes$

Enheten för magnetfält är tesla (T). 1 T = 1 Ns/Cm.

Nedanstående tabell ger en uppfattning om storlekar för några magnetfält:

| | |
|---|---|
| Stark supraledande laboratoriemagnet | 30 T |
| Stavmagnet | 0,01 T |
| Jordens magnetfält | 0,00005 T |

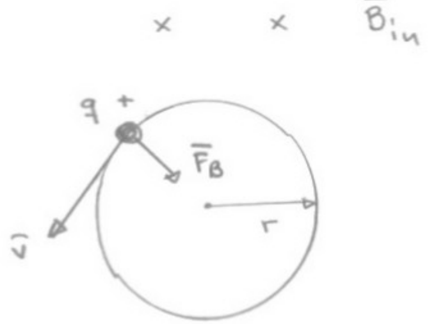
Lägg märke till följande skillnader mellan magnetiska och elektriska fält:

- Den elektriska kraften är alltid parallell eller antiparallell med det elektriska fältets riktning medan den magnetiska kraften är vinkelrät mot det magnetiska fältet.

- Den elektriska kraften som verkar på en laddad partikel är oberoende av partikelns hastighet medan den magnetiska kraften är proportionell mot hastigheten och således noll för en stillastående partikel.

- Det elektriska fältet uträttar ett arbete när det förflyttar en laddad partikel medan den magnetiska kraft, som är associerad med ett konstant magnetiskt fält, inte uträttar något arbete när en partikel förflyttas.

<u>En laddad partikels rörelse i ett homogent magnetfält.</u>




$$\Sigma F = F_B = ma$$

$$\Rightarrow \quad qvB = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$

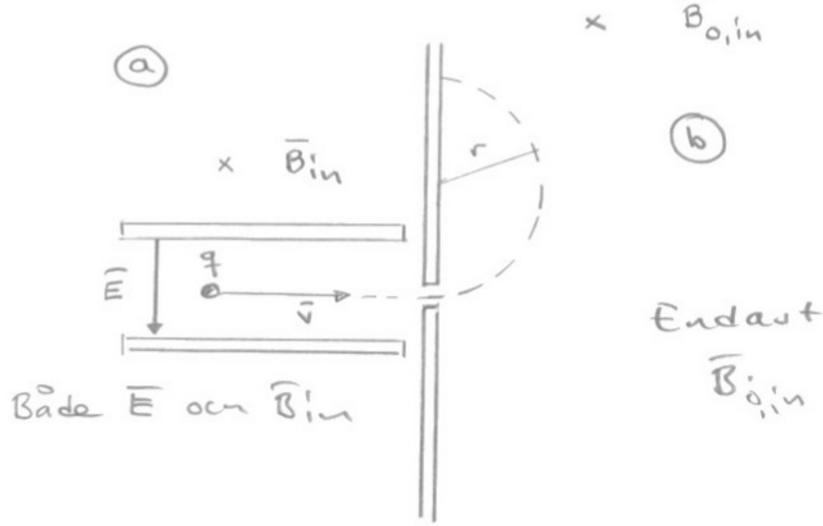
vinkelfrekvensen är oberoende av såväl v som r

Perioden $$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\frac{m}{qB}$$

Om $\bar{v}$ inte är vinkelrät mot $\bar{B}$ kommer partikeln att röra sig i en spiralformad bana

## Tillämpningar på laddade partiklars rörelse i magnetfält.

### Masspektrometern




I ⓐ kan man bestämma vilken hastighet partikeln (laddning $q$) måste ha för att inte böjas av :


$F_B = F_e$ om $qvB_{in} = qE$

$$\Rightarrow v = \frac{B_{in}}{E}$$

I ⓑ är nu $v$ given $\left(= \frac{B_{in}}{E}\right)$. Partiklarna kommer att röra sig i en cirkulär bana.

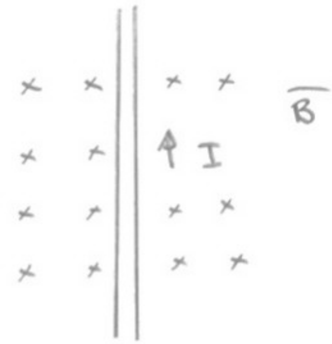
$$qvB_{o,in} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{r B_{o,in}}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{B_{in} B_{oin}}{E} \cdot r$$

Mätning av $r$ ger $\frac{m}{q}$ om $B_{in}$, $B_{oin}$ och $E$ är kända.

## Magnetisk kraft på en strömförande ledare:

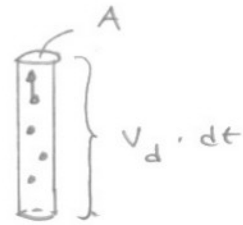
Antag att den strömförande ledaren innehåller n laddningsbärare per m$^3$ och att dessa har driftshastigheten $v_d$




Genom ledaren med tvärsnittsarea passerar laddningen

$$n(v_d \cdot dt \cdot A)q = dQ$$

under tiden dt




$$\Rightarrow I = \frac{dQ}{dt} = qnv_d \cdot A$$

Kraften på laddningarna (n · l · A stycken) på längden l av ledaren ges av

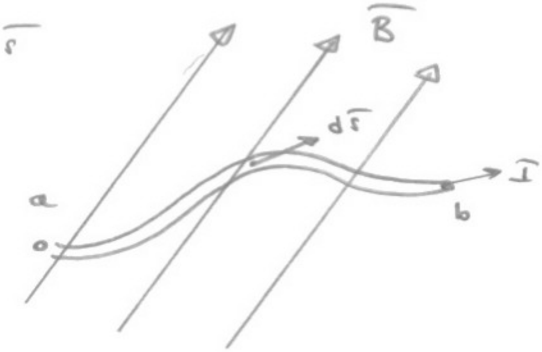
$$\bar{F}_B = (q\,\bar{v}_d \times \bar{B}) \cdot n \cdot l \cdot A$$

$$\bar{l} \parallel \bar{v}_d$$

$$\Rightarrow \bar{F}_B = I\,\bar{l} \times \bar{B}$$


Om ledaren inte är vinkelrät mot $\bar{B}$ får vi bidraget från $d\bar{s}$ enligt

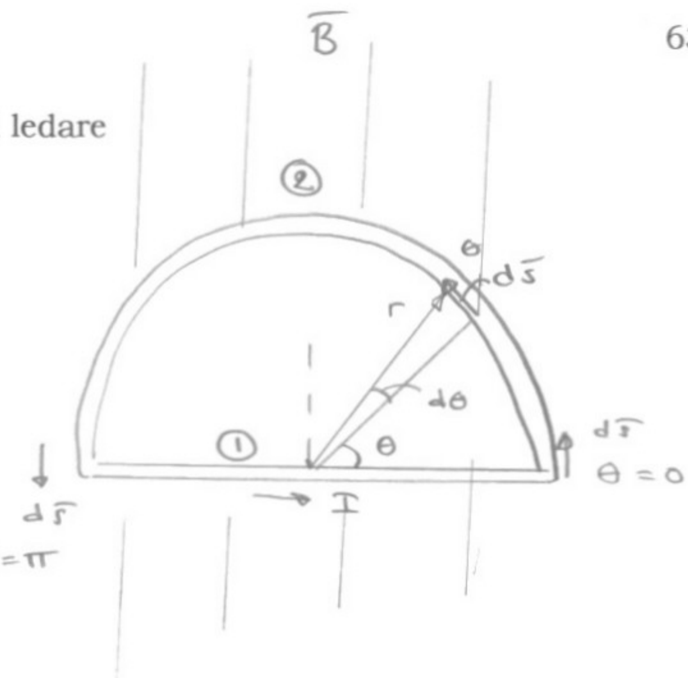
$$d\bar{F}_B = I\,d\bar{s} \times \bar{B}$$




Totalt

$$\bar{F}_B = I\int_a^b d\bar{s} \times \bar{B}$$

Exempel: Kraft på en halvcirkelformad ledare




① kraft på den raka delen:

$$F_1 = IlB \quad (\overline{l} \perp \overline{B})$$

$\odot \ \overline{F}_1$

$l = 2R \Rightarrow F_1 = 2IRB \quad \theta = \pi$

② kraft på den cirkelformade delen. $\overline{F}_2 \ \otimes$

$$dF_2 = I\,|d\overline{s} \times \overline{B}\,| = IB \sin\theta \cdot ds$$

men $ds = R \cdot d\theta$

$$\Rightarrow dF_2 = IBR \sin\theta \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow F_2 = IRB \int_0^{\pi} \sin\theta \cdot d\theta = IRB \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} =$$

$$= IRB\Big[-(-1-(+1)\Big] = 2IRB$$

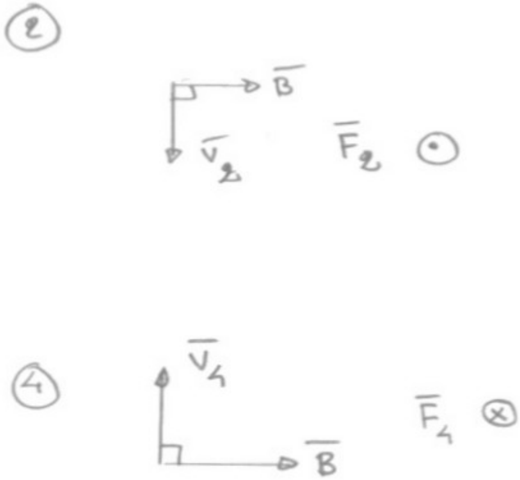
$$\therefore F_2 = F_1 \quad \text{men} \quad \overline{F}_1 = -\overline{F}_2$$

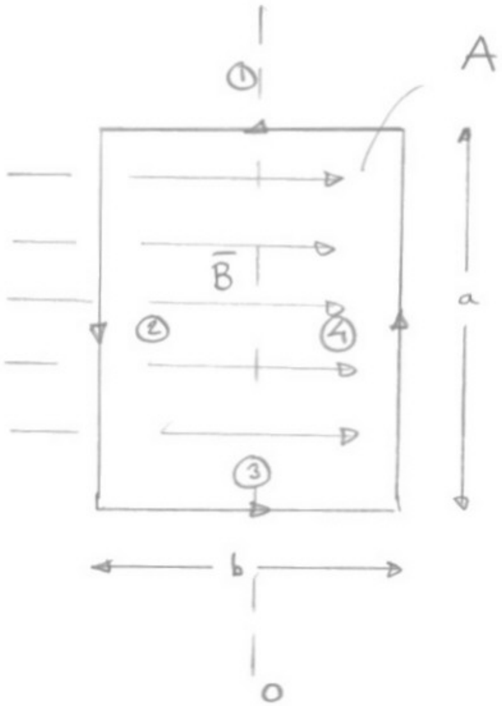
$$\Rightarrow \sum \overline{F} = 0$$

Summan av krafterna på en sluten strömslinga som befinner sig i ett homogent magnetfält $= 0$.

<u>Vridande moment på en strömslinga som befinner sig i ett homogent magnetfält:</u>

$F_2 = F_4 = I a b$




$A = ab$

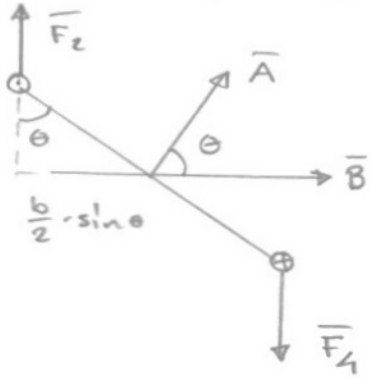
Vridande moment m.a.p. axeln O

$$\tau_{max} = F_2 \frac{b}{2} + F_4 \frac{b}{2} =$$

$$= IaB \frac{b}{2} + IaB \frac{b}{2} =$$

$$= IabB \quad = IAB$$

Antag att $\bar{B}$ bildar vinkeln $\theta$ med normalen till strömslingan.
Sett underifrån:




$$\tau = F_2 \frac{b}{2} \sin\theta + F_4 \frac{b}{2} \sin\theta =$$

$$= IaB \cdot 2\left(\frac{b}{2} \sin\theta\right) =$$

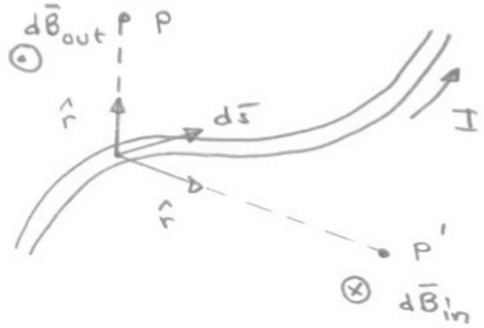
$$= IabB \sin\theta = IAB \cdot \sin\theta$$

eller $\underline{\underline{\bar{\tau} = I \bar{A} \times \bar{B}}}$ med $\bar{\mu} \equiv I\bar{A}$ magnetiska dipolmomentet

Biot-Savarts lag.

Hittills har vi studerat vad som händer när man placerar ett objekt i ett magnetfält utan att ha brytt oss om hur detta magnetfält har uppkommit.
Nu ska vi studera uppkomsten av magnetiska fält.

1819 upptäckte dansken H C Oersted att en kompassnål som placeras i närheten av en strömslinga påverkas av denna. Vidare studier har visat följande egenskaper.
Vi har en ledare som genomflyts av strömstyrkan I. d**B** är bidraget till magnetfältet i punkten P från det infinitesimala längden d**s**. **r** är ortsvektorn för P relativt d**s**.




- d**B** är vinkelrät mot såväl d**s** som **r**.
- Beloppet (styrkan) av d**B** är omvänt proportionell mot $r^2$.
- Beloppet av d**B** är proportionellt mot I och längden av ds.
- Beloppet av d**B** är proportionellt mot sinus för vinkeln mellan d**r** och **r**.

Detta kan sammanfattas matematisk:

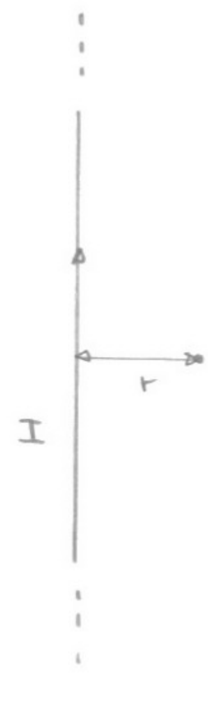
$$d\bar{B} = k_m \frac{I\, d\bar{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

där $$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \ \mathrm{T \cdot m/A}$$

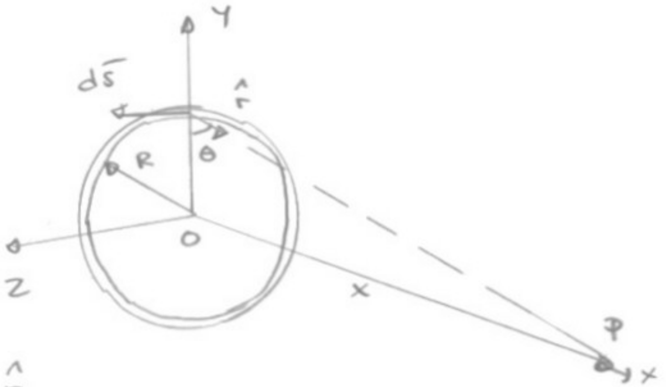
$\mu_0$ = permeabiliteten för vakuum.

Om vi har en oändligt lång och rak ledare får man

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r}$$



Exempel: Magnetfältet på axeln till en cirkulär strömbana.

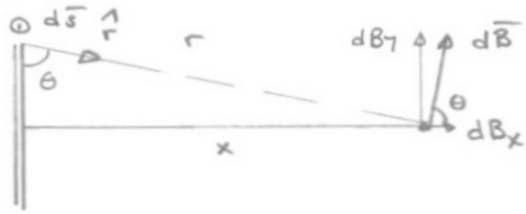



Bidrag från $d\bar{s}$

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|d\bar{s}\times\hat{r}|}{r^2} =$$

$d\bar{s} \perp \hat{r}$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{ds}{x^2+R^2}$$




När vi summerar ihop bidragen från hela ringen kommer y-komponenterna att ta ut varandra. Endast x-komp. "överlever".

$$\Rightarrow \quad B_x = \oint dB\cdot\cos\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{ds\cdot\cos\theta}{x^2+R^2}$$

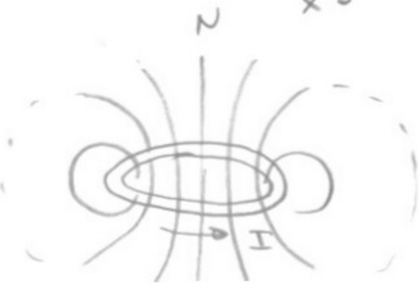
θ, R och x är konstanta för givet P.

Dessutom gäller $\cos\theta = \dfrac{R}{(x^2+R^2)^{1/2}}$

$$\Rightarrow \quad B_x = \frac{\mu_0 I R}{4\pi(x^2+R^2)^{3/2}}\oint^{2\pi R} ds = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$

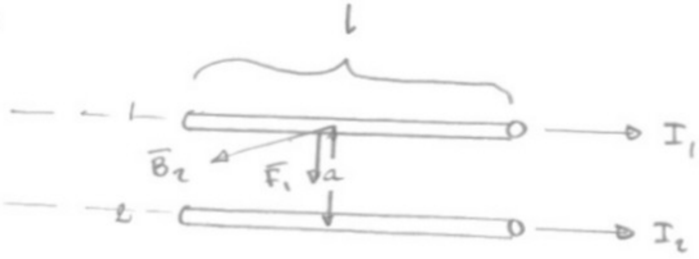
Specialfall: $\quad x=0 \Rightarrow B = \dfrac{\mu_0 I}{2R}$

$\quad x \gg R \Rightarrow B \approx \dfrac{\mu_0 I R^2}{x^3}$



Den magnetiska kraften mellan två parallella ledare.

oändlig längd




På ledare 1 får vi en kraft

$$F_1 = I_1 l \cdot B_2 =$$

$$= I_1 l \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} = \frac{l \mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

$\Rightarrow$ kraft per längdenhet $\qquad \dfrac{F_1}{l} = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$

I uttrycket finns båda strömstyrkorna på likvärdigt sätt

$$\Rightarrow F_1 = F_2 = F$$

$$\therefore \quad \frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}$$

Man kan visa att detta uttryck gäller även om ledarna inte är oändligt långa.

Ledare med parallella strömmar attraherar varandra

Ledare med antiparallella strömmar repellerar varandra.

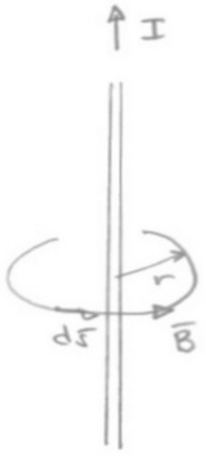
Kraftverkan mellan ledare används för att definiera enheten AMPERE.

Amperes lag.

Inom magnetismen finns det en motsvarighet till Gauss lag; Amperes lag.
Den ger sambandet mellan linjeintegralen av den magnetiska fältstyrkan och den strömstyrka som den slutna kurvan omsluter.

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = B \oint ds =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$




allmänt:

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 I$$

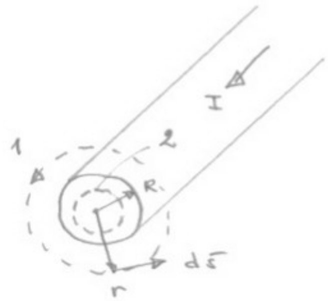
Amperes lag är giltig endast för likström.

För att det ska vara någorlunda enkelt att använda Amperes lag måste vi kunna definiera en integrationsväg vars delar uppfyller en eller flera av nedanstående villkor:

- Värdet av det magnetiska fältet konstant över delar av integrationsvägen.
- Skalärprodukten mellan **B** och d**s** kan skrivas som B ds eftersom **B** och d**s** är parallella.
- Skalärprodukten mellan **B** och d**s** är lika med noll eftersom **B** och d**s** är vinkelräta.
- Magnetfältet är noll.

Exempel: Magnetfältet orsakat av en lång strömförande ledare.

Vi kunde ha använt Biot-Savarts lag, men i detta fall är det enklare med Amperes lag.




Utanför ledaren. Väg 1.

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = B \oint ds =$$

$$= B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad r > R$$

---

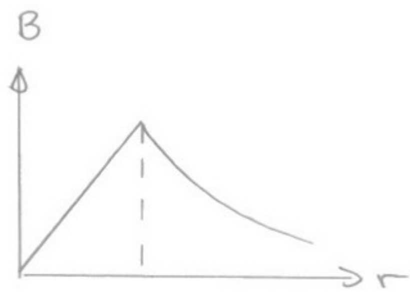
Inuti ledaren. Väg 2. $r < R$

Antag homogen strömtäthet $\Rightarrow \dfrac{I'}{I} = \dfrac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow I' = \dfrac{r^2}{R^2} I$

$I'$ = strömmen innanför väg 2.

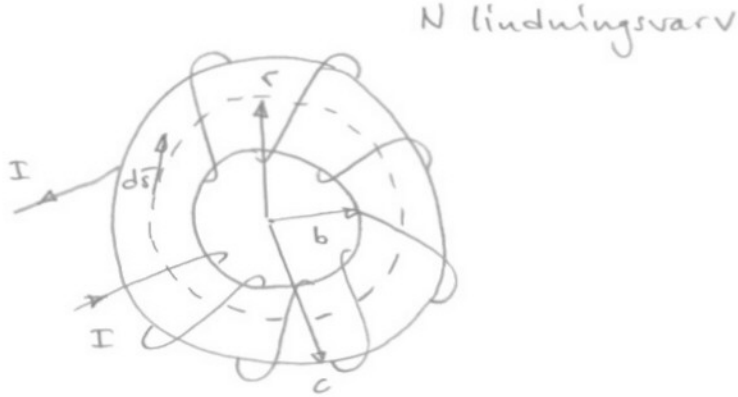
$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I' = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

$$\Rightarrow B = \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \right) r \qquad r < R$$



Exempel: Magnetfältet skapat av en spole.

Spolen består av en ledare som har lindats runt en ring av ett icke ledande material.




$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{s} = B\int ds = B\cdot 2\pi r = \mu_0(NI)$$

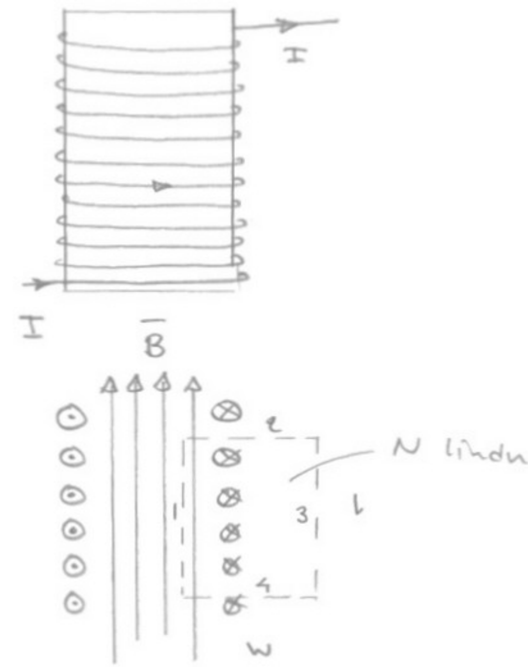
$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

Om r är stort i förhållande till spolens tvärsnittsradie, dvs

är variationen av B inuti spolen liten.

Magnetfältet från en solenoid.

En solenoid är en lång tråd som formats till en spiral. För en ideal solenoid är magnetfältet noll utanför den och homogent inuti den.




$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \int_1 \bar{B} \cdot d\bar{s} = B \cdot l$$

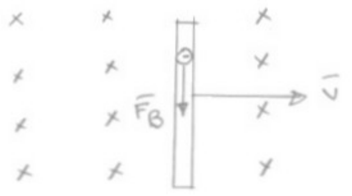
$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{s} = \mu_0 (NI)$$

$$\therefore B \cdot l = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow B = \mu_0 \frac{N}{l} I = \mu_0 n I$$

## FARADAYS LAG OCH INDUKTANS

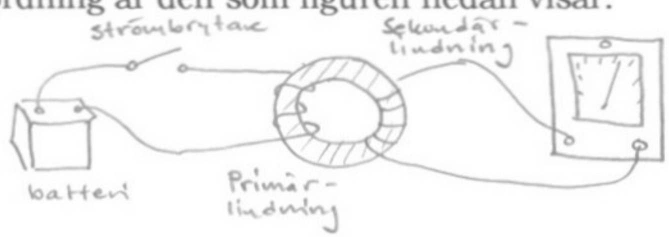
Om man har en ledare och rör den i ett magnetiskt fält utsätts laddningsbärarna i ledaren för en kraft, vilket leder till att en ström uppstår i den.




Ett annat sätt att åstadkomma en ström i en sluten krets är att röra en stavmagnet i förhållande till en stillastående strömslinga. Strömriktningen ändras när man ändrar riktningen på den relativa rörelsen mellan magnet och strömslinga. Mer om detta senare.

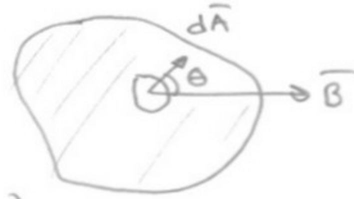

Den ström som uppstår i strömslingan kallas en inducerad ström och det som driver på strömmen kallas för en inducerad elektromotorisk kraft. På svenska förkortas detta emk, medan det på engelska förkortas emf. I den fortsatta framställningen kommer emf att användas. Ett vanligt batteri har en emk, men den åstadkoms inte genom induktion.

En annan försöksanordning är den som figuren nedan visar.




Ena delen (primärlindningen) av uppställningen består av ett batteri, en strömbrytare och en spole som är lindad runt en järnring. Den andra delen (sekundärlindningen) består av en spole och en amperemeter.
Om man sluter kretsen i primärdelen kommer amperemetern i sekundärdelen att ge ett utslag (åt vänster eller åt höger beroende på hur man vänt polerna på batteriet på primärsidan) och sedan återvända till noll.
Som ett resultat av detta experiment drog Faraday slutsatsen att en elektrisk ström kan åstadkommas med hjälp av ett magnetfält som varierar i tiden.
Sekundärsidan uppför sig som om den har kortvarig kontakt med en emf.

För att kvantifiera bland annat de observationer som har beskrivits ovan definierar vi nu en storhet som vi kallar magnetiskt flöde, i analogi med storheten elektrikt flöde.




$$\phi_B = \int \bar{B} \cdot d\bar{A}$$

enhet $Tm^2$
eller weber (Wb)
$1\,Wb = 1\,Tm^2$

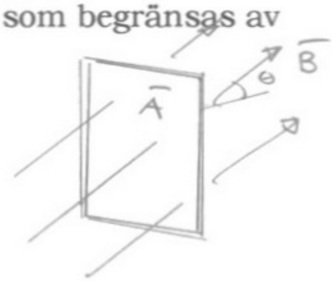
Nu kan vi beskriva våra observationer med hjälp av Faradays induktionslag:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \mathcal{E} = \text{emf.}$$

där $\Phi_B$ är det magnetiska flödet genom en yta som definieras av stömslingan. Om strömslingan har N varv får vi.

$$\mathcal{E} = -N\frac{d\phi_B}{dt}$$

Antag att det magnetiska fältet är konstant över ytan A som begränsas av strömslingan. Då får vi:

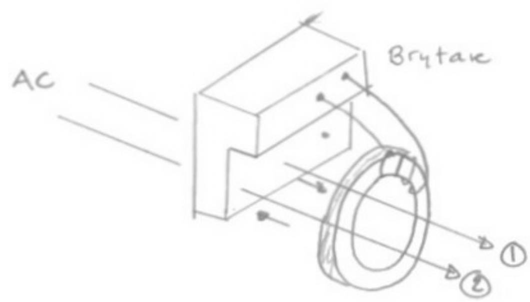



$$\phi_B = \int \bar{B} \cdot d\bar{A} = \int B\,dA \cdot \cos\theta = $$
$$= BA \cdot \cos\theta$$

Vilket innebär att en inducerade emf uppstår enligt:

$$\epsilon = -\frac{d}{dt}(BA \cdot \cos\theta)$$

Tillämpning: JORDFELSBRYTARE




Om inga läckage av ström till jord finns, så är de två strömmarna 1 och 2 i figuren exakt lika stor, men motriktade. Så länge som strömmarna är lika stora är det magnetiska flödet genom detektionsspolen konstant, vilket innebär att det inte induceras någon emf i den kretsen. Om en av 1 och 2 läcker ström till jord (exempelvis till ett jordat metallhölje i en elektrisk apparat) är de två strömmarna plötsligt inte lika stora längre. Det magnetiska flödet genom detektionsspolen ändras, varvid det uppstår en ström i den kretsen och en stömbrytare slår ifrån strömmen till den felaktiga apparaten.

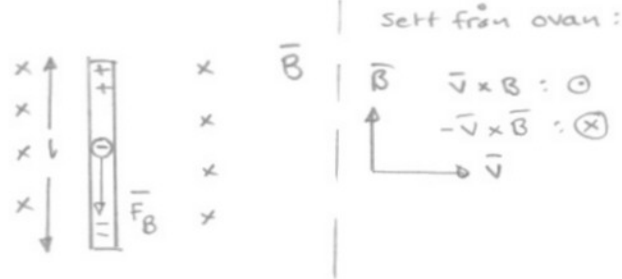
RÖRELSEBETINGAD emf.

Vi ska nu studera fall då en emf uppstår när en ledare rör sig i ett magnetiskt fält.

Betrakta en ledare, vars längd är l, som rör sig med hastigheten **v** vinkelrätt mot ett magnetiskt fält vars fältstyrka är **B**.

Elektronerna som rör sig påverkas av en kraft

$$|\bar{F}_B| = |q\bar{v} \times \bar{B}|$$




I enlighet med Newtons andra lag kommer elektronerna att röra sig längs ledaren och lämna efter sig ett överskott av positiv laddning. Då uppstår ett elektriskt fält **E** i ledaren. När den elektriska kraften och den magnetiska är lika stora upphör laddningstransporten. Då gäller

$$qE = qvB$$

$$\Rightarrow E = vB$$


Och spänningen (potentialskillnaden) mellan ledarens ändar ges av:

$$\Delta V = E \cdot l = Blv$$

<u>En potentialskillnad upprätthålls så länge som ledaren rör sig i den manetiska fältet. Om rörelseriktningen byts, kommer potentialskillnaden att byta tecken.</u>

Om vi nu låter ledaren ingå i en sluten krets med en resistans R kommer en kontinuerlig ström att uppstå.

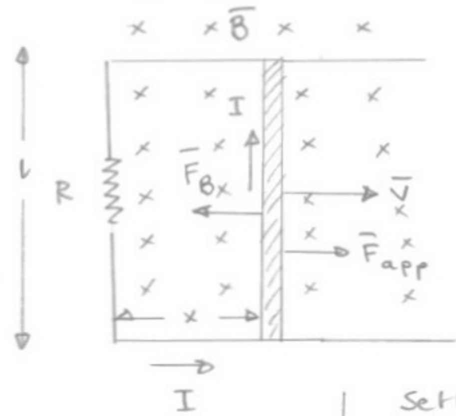
När den rörliga delen (längd = l) av kretsen befinner sig i läget x gäller:

$$\Phi_B = Blx$$

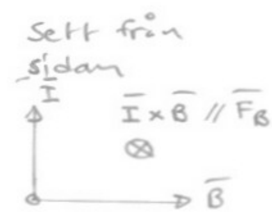
Inducerad emf : $\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} =$

$$= -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} =$$

$$= -Blv$$




$$I = \frac{|\varepsilon|}{R} = \frac{Blv}{R}$$




Elektrisk effektutveckling

$$P = RI^2 = R\left(\frac{Blv}{R}\right)^2 = \frac{B^2 l^2 v^2}{\;}$$

Skapas energi?

Om vi har en ström som flyter genom ett motstånd alstras effekten P = R I².

Vad är det som står för denna effektutveckling? Jo, för att få den rörliga ledaren att förflyttas krävs en yttre kraft $\mathbf{F}_{app}$.

Vid en förflyttning av ledaren sträckan dx utför den yttre kraften arbetet dW enligt:

$$dW = \bar{F}_{app} \cdot d\bar{x} = F_{app} \cdot dx$$

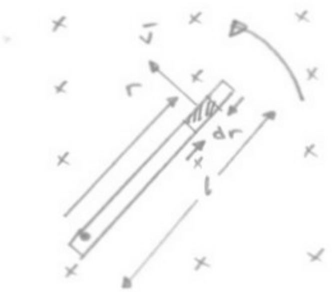
Effekt = arbete/tid = dW/dt, vilket ger

$$\Rightarrow P_{mek} = \frac{dW}{dt} = F_{app} \cdot \frac{dx}{dt} = F_{app} \cdot v = (I l B) v = \left(\frac{Blv}{R}\right) lBv =$$

$$= \frac{B^2 l^2 v^2}{R} \qquad \therefore \; P_{el} = P_{mek}.$$

Exempel: Roterande stav

En stav med längd l roterar med konstant vinkelhastighet i närvaro av ett magnetfält såsom figuren visar. Bestäm den emf som induceras mellan stavens ändar.




Bidrag till $\mathcal{E}$ från stavelementet med bredden dr på avståndet r från leden

$$d\mathcal{E} = Bv\,dr \qquad v = \omega r$$

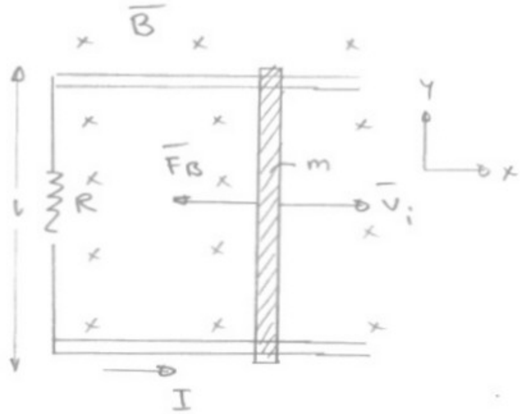
total $\mathcal{E}$ :

$$\mathcal{E} = \int d\mathcal{E} = \int_0^r Bv\,dr = B\omega \int_0^R r \cdot dr =$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2} B \omega l^2}}$$

Exempel: En glidande stav i ett magnetfält.

Den ledande staven i figuren på två parallella friktionsfria banor såsom figuren visar. Staven har massan m och längden l och har initialhastigheten $\mathbf{v}_i$ åt höger och släpps vid tiden t = 0.
Bestäm hastigheten som funktion av tiden genom att använda
A Newtons lagar
B Energiprincipen.




Newtons lagar:

A $\quad F_x = ma = m\frac{dv}{dt} = -IlB$

men $\quad I = \frac{Blv}{R}$

$$\Rightarrow m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}v$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{v} = -\left(\frac{B^2l^2}{mR}\right)dt \qquad \text{randvillkor } t=0 : v = v_i$$

$$\therefore \int_{v_i}^{v}\frac{dv}{v} = -\frac{B^2l^2}{mR}\int_0^t dt \Rightarrow \ln\frac{v}{v_i} = -\frac{B^2l^2}{mR}t = -\frac{t}{\tau}$$

$$\tau \equiv \frac{B^2l^2}{mR}$$

$$\Rightarrow e^{\ln\frac{v}{v_i}} = e^{-t/\tau} \Rightarrow \underline{\underline{v = v_i e^{-t/\tau}}}$$

B $\quad$ Energiprincipen: $\quad P_{el} = -P_{mek}$ eller $P_{res} = -P_{bar}$

$$\Rightarrow I^2R = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{B^2l^2v^2}{R} = -mv\frac{dv}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{B^2l^2}{mR}\right)dt$$

sedan förbättning enligt A

Växelströmsgeneratorn

En extern kraft roterar strömslingan som befinner sig i ett magnetfält.

$$\Phi_B = BA\cos\theta = BA\cos\omega t$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -NAB\frac{d}{dt}(\cos\omega t) =$$

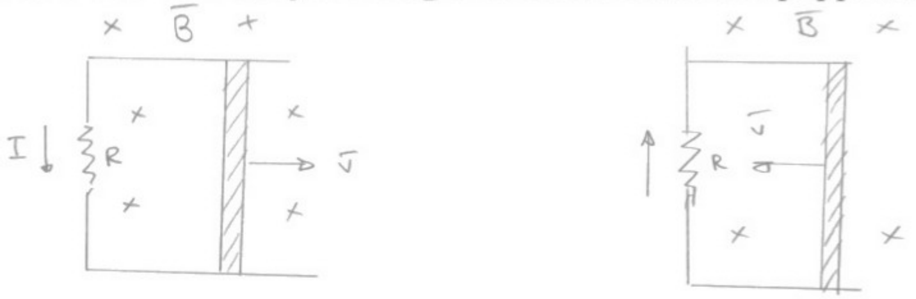
$$= NAB\omega \cdot \sin\omega t$$

## LENZ LAG

Som vi har sett finns det ett minustecken i Faradays lag, som anger tecknet på den inducerade emf:en.
Förklaringen till minustecknet finns i Lenz lag som lyder:

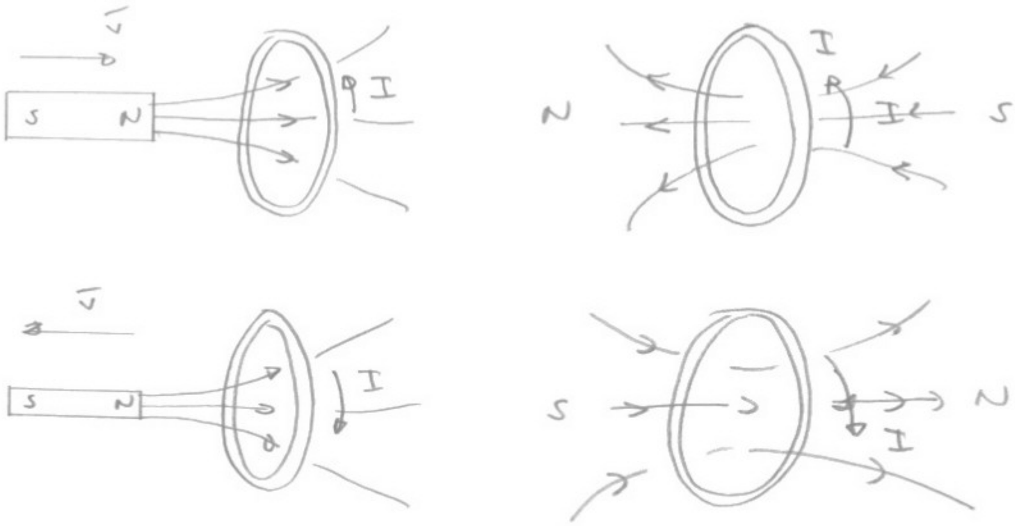
Polariteten för den inducerade emf:en i en krets är sådan att den producerar en ström som MOTVERKAR ÄNDRINGEN av det magnetiska flödet genom kretsen.

Om vi går tillbaka till fallet med ledaren som rör sig med konstant hastighet i ett magnetfält ser vi att om ledaren rör sig åt höger så uppstår det en ström som ger ett magnetfält som är riktat ut från papperet. Detta innebär en ström som flyter moturs eftersom det yttre magnetfältet är riktat in i papperet.




Med motsatt rörelseriktning uppstår en ström som flyter medurs.

Vad som händer om vi rör en stavmagnet i närheten av en strömslinga framgår av figuren.

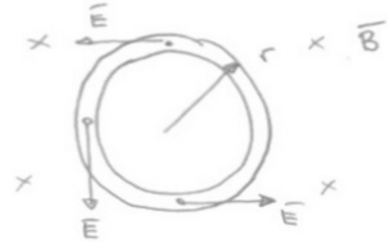


Inducerad emf och elektriska fält.

Ett elektriskt fält uppstår i en ledare som utsätts för ett varierande magnetiskt flöde. Det behövs inte ens en ledare för att det ska uppstå ett elektriskt fält, bara det magnetiska flödet ändras. Detta är sant t o m för vakuum.

Det elektriska fältet som alstras på detta sätt har inte samma egenskaper som det som alstras av statiska laddningar.

Vi illustrerar detta genom att studera en cirkulär slinga med radie r som befinner sig i ett magnetfält såsom visas i figuren.




Om det magnetiska flödet genom slingan ändras uppstår en inducerad emf enligt:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Det elektriska fältet är tangentiellt till slingan. Arbetet som utförs av det elektriska fältet när en testladdning q förs runt ett varv ges av

$$W = q\mathcal{E}$$

arbetet är också lika med

$$W = \int \bar{F} \cdot d\bar{r} = qE(2\pi r)$$

vilket ger

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r}$$

samt

$$E = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{d}{dt}\left(B\pi r^2\right) = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

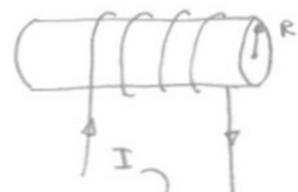
Det inducerade elektriska fältet, som uppstår genom ett magnetfält som ändras, ger ett icke-konservativt fält.

Arbete uträttas när laddningen förs runt ett varv och således återkommer till utgångspunkten. Det är ju motsatsen som karakteriserar konservativa fält och krafter.

Exempel: Elektriskt fält som induceras av ett förändrat B-fält i en solenoid.

En lång solenoid med radien R har n lindningar per meter. I solenoiden flyter en en ström som varierar i tiden enligt $I = I_{max} \cos \omega t$

A. Bestäm beloppet av det elektriska fältet på avståndet r från solenoiden. r>R


$$\left.\begin{aligned} \mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = E \cdot 2\pi r \\ \Phi_B = B \pi r^2 \Rightarrow \frac{d\Phi_B}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = -\frac{R^2}{2r}\frac{dB}{dt}$$

$$\text{Solenoid: } \left.\begin{aligned} B = \mu_0 n I \\ I = I_{max} \cos \omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = -\frac{R^2}{2r}\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n I_{max} \cos \omega t\right) =$$

$$= \frac{\mu_0 n I_{max} \omega R^2}{2r} \sin \omega t$$

B. samma sak för r<R

Homogent B inne i solenoiden


$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = -\frac{d}{dt}(B\pi r^2) = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{s} = E \cdot 2\pi r$$

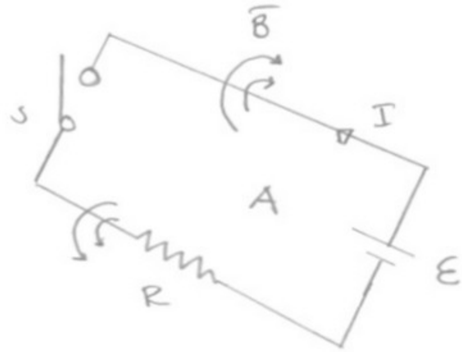
$$\therefore \quad E = -\frac{r}{2}\frac{dB}{dt}$$

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 n I_{max} \cos \omega t$$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu_0 n I_{max} \omega}{2} r \cdot \sin \omega t$$

## Självinduktans

Betrakta följande krets




1) Slut strömbrytaren
2) $\mathcal{E}$ driver fram en ström $I$ i kretsen
3) Magn. flödet genom $A$ ökar
4) En emf induceras som motverkar $I$ (självinducerad emf) $\mathcal{E}_L$

Om vi har en spole med $N$ varv gäller

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{L = \frac{N\Phi_B}{I}}$$

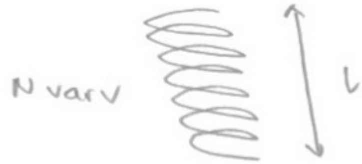
$L$ = induktansen

eller

$$L = -\frac{\mathcal{E}_L}{\frac{dI}{dt}}$$

enhet $\frac{V}{\frac{A}{s}} = \frac{Vs}{A} = H$ = henry

## Induktansen för en solenoid.




Inuti spolen: $B = \mu_0 \frac{N}{l} I$

$$\Phi_B = BA = \mu_0 \frac{NA}{l} I$$

$$\left.\begin{array}{l} L = \dfrac{N\Phi_B}{I} = \dfrac{\mu_0 N^2 A}{l} \\ \text{men} \quad N = n \cdot l \end{array}\right\} \Rightarrow L = \mu_0 \frac{(nl)^2}{l} A =$$

$$= \mu_0 n^2 (Al) =$$

$$= \mu_0 n^2 V$$

där $V$ = spolens volym.

Bestäm $L$ om spolen har 300 varv och har längden 0,25 m och tvärsnittsarean är 4,00 cm²

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{300^2 \cdot 4{,}00 \cdot 10^{-4}}{0{,}25} =$$

$$= 1{,}81 \cdot 10^{-4}\ \text{H} = \underline{\underline{0{,}181\ \text{mH}}}$$

Bestäm $\mathcal{E}_L$ om $\frac{dI}{dt} = -50{,}0$ A/s

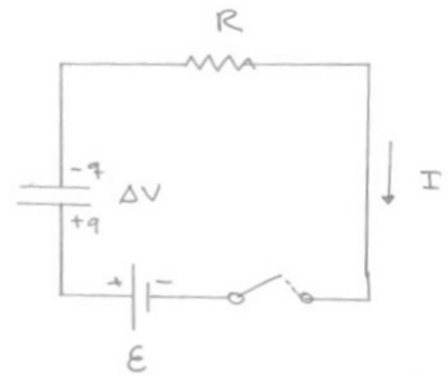
$$\mathcal{E}_L = -L\frac{dI}{dt} = -(0{,}181 \cdot 10^{-3})(-50{,}0) =$$

$$= \underline{\underline{9{,}05\ \text{mV}}}$$

## RC-kretsen

Uppladdning:

$$\Delta V = \frac{q}{C}$$




$$IR + \Delta V = \mathcal{E}$$

$$\Rightarrow \mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0 \quad (1)$$

$t = 0$ (strömbrytaren slår till) $q = 0 \quad \Rightarrow I_0 = \dfrac{\mathcal{E}}{R}$

(1) ger $\quad I = \dfrac{\mathcal{E}}{R} - \dfrac{q}{RC} \qquad$ men $I = \dfrac{dq}{dt}$

$$\therefore \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{q}{RC} = \frac{C\mathcal{E} - q}{RC}$$

$$\Rightarrow \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} \cdot dt$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t \to \infty \\ \mathcal{E} = \Delta V = \dfrac{Q}{C} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \int_0^q \frac{dq}{q - C\mathcal{E}} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

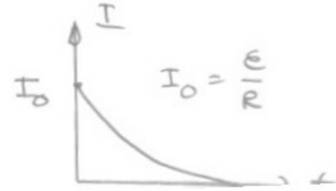
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}}\right) = -\frac{1}{RC} t$$

$$\Rightarrow \frac{q - C\mathcal{E}}{-C\mathcal{E}} = e^{-\frac{t}{RC}} \quad \Rightarrow q(t) = C\mathcal{E}\left[1 - e^{-t/RC}\right] =$$

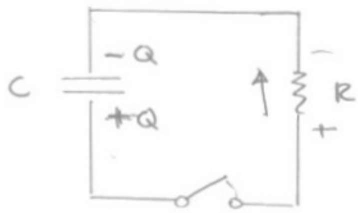
$$= Q\left[1 - e^{-t/RC}\right]$$

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[C\mathcal{E}(1 - e^{-t/RC})\right] =$$

$$= \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-t/RC}$$



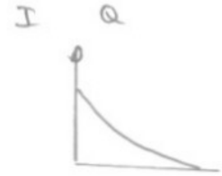
Urladdning av RC-kretsen.




$$-\frac{q}{C} - IR = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{q}{C} - R\frac{dq}{dt} = 0$$

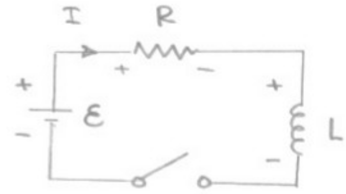
$$\Rightarrow \int_Q^q \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt$$




$$\Rightarrow q(t) = Q\, e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow I(t) = -I_0\, e^{-t/RC}$$

## RL-kretsen




strömbrytaren sluts vid $t = 0$

Den motriktade emf:n över spolen ges av $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathcal{E}}{R} - I - \frac{L}{R}\frac{dI}{dt} = x + \frac{L}{R}\frac{dx}{dt} = 0$$

där $\quad x = \frac{\mathcal{E}}{R} - I \quad , \quad dx = -dI$

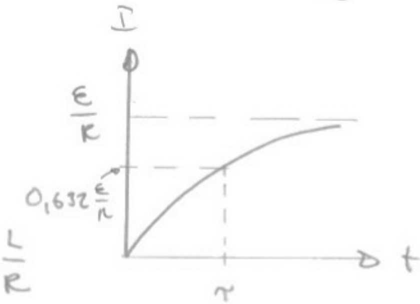
$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \int_{x_i}^{x} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_0^t dt \qquad \Rightarrow \quad x = x_i\, e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$$

men $I = 0$ då $t = 0 \Rightarrow x_i = \frac{\mathcal{E}}{R}$

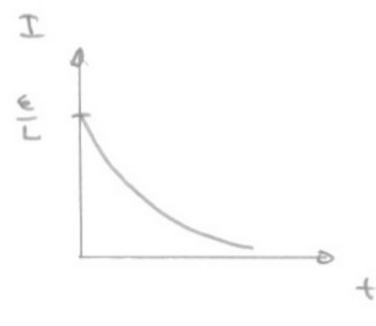
$$\therefore \quad \frac{\mathcal{E}}{R} - I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$




$\tau \equiv \frac{L}{R}$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L} e^{-t/\tau}$$



Energi i det elektriska fältet i en kondensator och i ett magnetfält.

Magnetfält: $\mathcal{E} - IR - L\dfrac{dI}{dt} = 0$

$$\Rightarrow I\mathcal{E} = I^2R + LI\frac{dI}{dt}$$

$I\mathcal{E}$ = effekt levererad av batteriet

$I^2R$ = effektutv. i motståndet

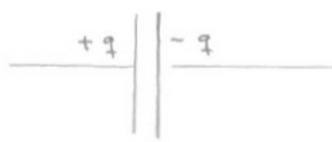
$\therefore\ LI\dfrac{dI}{dt}$ = effektutv. i spolen. $\dfrac{dU_B}{dt}$

$$\Rightarrow U_B = \int_0^{U_B} dU_B = \int_0^{I} LI \cdot dt$$

$$\therefore\ \underline{\underline{U_B = \frac{1}{2}LI^2}}$$

---

Kondensator:

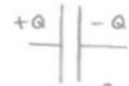



$\Delta V = \dfrac{Q}{C}$

arbete för att föra över laddningen $dq$ från hö platta till vä:

$$dW = \Delta V \cdot dq = \frac{q}{C}\cdot dq$$

Totalt arbete för att åstadkomma




$$W = \int dW = \int_0^Q \frac{q}{C}\cdot dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

men $Q = \Delta V \cdot C$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

energi som "laddas" upp i kondensatorn $U = \dfrac{1}{2}C(\Delta V)^2$

Plattkondensator: $\Delta V = E\cdot d$

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$


$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}(Ed)^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0 A d\cdot E^2$$

energitäthet $w = \frac{U}{\ldots} = \frac{U}{\ldots} = \frac{1}{\ldots} E^2$