1.1

En raket avfyras vertikalt uppåt med en utgångshastighet som är 80 m/s. Den accelereras uppåt med 4,00 m/s² tills den når höjden 1000 m. Då stannar motorn och raketen faller fritt mot marken med accelerationen -9,80 m/s².

a. Hur länge befinner sig raketen i rörelse?
b. Hur högt når raketen?
c. Vad är raketens hastighet när den träffar marken?

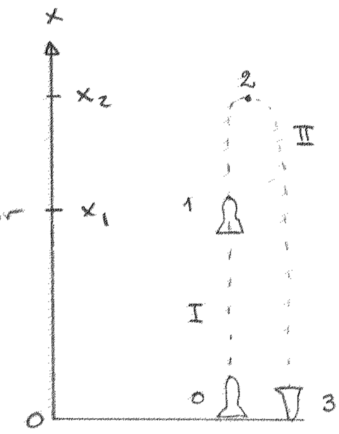
Lösning:

$\ddot{x}(t) = a$

$\dot{x}(t) = at + C_1$

$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2$

C_1 och C_2 bestäms av randvillkor



I: Motorerna är på

$a = a_1$

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}(0) = v(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 \\ x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_0 t \\ \dot{x}(t) = a_1 t + v_0 \\ \ddot{x}(t) = a_1 \end{array}$$

Hur länge är raketen i rörelse under fas I? $x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_0 t_1$

$$\Rightarrow t_1^2 + \frac{2v_0}{a_1}t_1 - \frac{2x_1}{a_1} = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{v_0}{a_1} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{a_1^2} + \frac{2x_1}{a_1}}$$

$$t_1 > 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{v_0}{a_1} + \frac{v_0}{a_1}\sqrt{1 + \frac{2x_1 a_1}{v_0^2}}$$ (dimensionsanalys!)

Sätt in $v_0 = 80\ m/s$, $a_1 = 4\ m/s^2$, $x_1 = 1000\ m$ $\Rightarrow$ $\underline{t_1 = 10\ s}$

II: motorerna stannar : $x_1 = 1000\ m$

Hur stor är hastigheten när motorerna stannar? $v_1 = \dot{x}(t_1) = a_1 t_1 + v_0$

Insättning av a_1, v_0 och t_1 ger $v_1 = 4 \cdot 10 + 80 = \underline{120\ m/s}$

Fritt fall (på väg upp): $v_1 = 120\ m/s$ $a = g = -9{,}80\ m/s^2$

$x_1 = 1000\ m$

$$\boxed{\begin{array}{l} \ddot{x}(t) = g \\ \dot{x}(t) = gt + v_1 \\ x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_1 t + x_1 \end{array}}$$

Vi startar om klockan när fas II inleds och kan beskriva hela fas II med dessa ekvationer.

1.1 forts.

Hur lång tid är raketen i rörelse uppåt under fas II ?

$$\dot{x}(t_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad g t_2 + v_1 = 0 \quad \Rightarrow t_2 = -\frac{v_1}{g} = -\frac{120}{(-9{,}80)} \, m/s =$$

$$= \underline{\underline{12{,}24 \, s}}$$

Hur högt når raketen?

$$x_2 = x(t_2) = \frac{1}{2} g \left(-\frac{v_1}{g}\right)^2 + v_1\left(-\frac{v_1}{g}\right) + \overset{1000\,m}{x_1} = \underline{\underline{1735 \, m}}$$

Efter hur lång tid efter det att motorerna stannat träffar raketen marken?

$$x(t_3) = 0 = \frac{1}{2} g t_3^2 + v_1 t_3 + x_1 \quad \Rightarrow \quad t_3 = -\frac{v_1}{g} \pm \sqrt{\frac{v_1^2}{g^2} - \frac{2x_1}{g}}$$

$$g = -9{,}80 \, , \; v_1 = 120 \, m/s \, , \; x_1 = 1000 \, m$$

$$\Rightarrow t_3 = 31{,}05 \, s \approx 31 s$$

Sammanlagt befinner sig raketen $t_1 + t_3 = 10 + 31 = \underline{\underline{41 s}}$ i luften

Hastighet vid markträffen:

$$\dot{x}(t_3) = g t_3 + v_1 = -9{,}80 \cdot 31 + 120 = 304{,}3 - 120 = \underline{\underline{184 \, m/s}}$$

1.2

En person går först med konstant hastighet v_1 längs en rät linje mellan A och B och sedan tillbaka längs linjen från B till A med hastigheten v_2.

a. Hur stor är medelfarten över hela promenaden tur-och-retur?
b. Hur stor är medelhastigheten över samma sträcka?

a) Medelfart

$t_1 = \frac{s}{v_1}$ $\qquad$ $t_2 = \frac{s}{v_2}$

$$v_{medel} = \frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}} = \frac{2s\,v_1 v_2}{v_2 s + v_1 s} = \frac{2 v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

b) $$\bar{v}_{medel} = \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta t} = 0 \quad \text{ty} \quad \Delta\bar{x} = 0$$

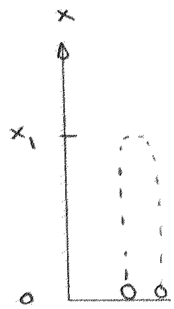
1.3

En boll kastas vertikalt uppåt från marken med en utgångshastighet som är 15 m/s.

a. Hur lång tid tar det för bollen att nå maximal höjd?
b. Hur högt når bollen?
c. Bestäm hastighet och acceleration 2,00 s efter det att bollen kastats.

$$\ddot{x}(t) = g$$
$$\dot{x}(t) = gt + v_0$$
$$x(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + x_0$$

$g = -9{,}8$ m/s
$v_0 = 15$ m/s
$x_0 = 0$



a) t_1 : $\quad \dot{x}(t_1) = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{v_0}{g} = -\frac{15}{(-9{,}8)}$ s $\approx \underline{\underline{1{,}53 \text{ s}}}$

b) x_1 : $$x(t_1) = \frac{1}{2} g \left(-\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(-\frac{v_0}{g}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{g} = -\frac{v_0^2}{2g} =$$
$$= -\frac{15^2}{2(-9{,}8)} = 11{,}47 \text{ m} = \underline{\underline{11 \text{ m}}}$$

c) $$\ddot{x}(2{,}00) = g = -9{,}8 \text{ m/s}^2$$
$$\dot{x}(2{,}00) = g \cdot 2{,}00 + v_0 = -9{,}8 \cdot 2{,}00 + 15 = -4{,}6 \text{ m/s} = \underline{\underline{5 \text{ m/s}}}.$$

1:23

En partikels hastighet **v** är given av **v** = u sin ωt $\hat{\mathbf{i}}$ + u cos ωt $\hat{\mathbf{j}}$ + w$\hat{\mathbf{k}}$, där u, w och ω är konstanter. Beräkna partikelns fart (speed) s, dess acceleration **a**(t) samt dess lägesvektor **r**(t), om **r**(0) = α **i**.

i) Fart: $|\bar{v}|^2 = u^2 \cdot \sin^2\omega t + u^2 \cdot \cos^2\omega t + w^2 = u^2 + w^2 \Rightarrow v = \sqrt{u^2+w^2} = s$

ii) Acceleration: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = u\omega \cdot \cos\omega t\,\hat{i} - u\omega \cdot \sin\omega t\,\hat{j} + 0$

iii) $\bar{r}(t)$: $\bar{v} = u \cdot \sin\omega t\,\hat{i} + u\cos\omega t\,\hat{j} + w\hat{k} = \dot{\bar{r}}$

$$\Rightarrow \bar{r} = \left[-\frac{u}{\omega}\cos\omega t + C_x\right]\hat{i} + \left[\frac{u}{\omega}\sin\omega t + C_y\right]\hat{j} + (wt + C_z)\hat{k}$$

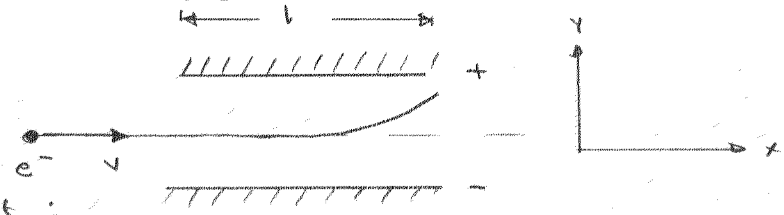
Begynnelsevillkor $\bar{r}(0) = \alpha\hat{i}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{u}{\omega} + C_x = \alpha \Rightarrow C_x = \alpha + \frac{u}{\omega} \\ \frac{u}{\omega}\cdot 0 + C_y = 0 \Rightarrow C_y = 0 \\ w\cdot 0 + C_z = 0 \Rightarrow C_z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \bar{r}(t) = \frac{u}{\omega}(1-\cos\omega t)\hat{i} + \frac{u}{\omega}\cdot\sin\omega t\,\hat{j} + wt\,\hat{k}$$

1:25

I ett katodstrålerör kommer elektroner med horisontell hastighet 4,0 10^6 m/s in mellan två horisontella plattor, som ger en uppåtriktad acceleration av 5,0 10^{13} m/s². Plattorna har en längden 3,0 cm. Beräkna hastighetens horisontal- och vertikalkomponent för en elektron som precis har passerat plattorna. Behöver man ta med tyngdaccelerationens inverkan i beräkningarna?



Givet:

$v_x = 4{,}0\cdot 10^6$ m/s $v_y = 0$

$a_y = 5{,}0\cdot 10^{13}$ m/s²

$l = 3{,}0\cdot 10^{-2}$ m

Sökt:

Hastigheten v_x' och v_y' efter passage av plattorna.

Lösning:

tid för passage av plattorna = Δt

$$\left.\begin{aligned} v_y' &= a_y \cdot \Delta t \\ \Delta t &\text{ ges av } \frac{l}{v_x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow v_y' = a_y\cdot\frac{l}{v_x} = 5{,}0\cdot 10^{13}\,\frac{3{,}0\cdot 10^{-2}}{4{,}0\cdot 10^6}\text{ m/s} =$$

$$= 3{,}75\cdot 10^5 \text{ m/s} = 3{,}8\cdot 10^5 \text{ m/s}$$

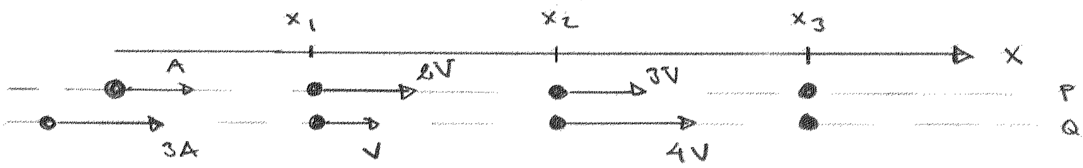
$v_x' = v_x = 4{,}0\cdot 10^6$ m/s, ty $a_x = 0$

$g \approx 10$ m/s² $<< 5\cdot 10^{13}$ m/s² ∴ tyngdkraften kan verkligen försummas.

1:28

Två rymdfarkoster P och Q rör sig med likformig positiv acceleration A och 3A i samma riktning längs parallella raka banor i rymden. Vid något tillfälle är de jämsides och de har då farten 2V respektive V. Visa att rymdfarkosterna åter kommer att vara jämsides efter det att en tid V/A förlöpt och bestäm deras hastigheter. Om Q därefter rör sig med konstant hastighet, visa att de båda farkosterna en tredje gång kommer att vara jämsides då de totalt har färdats sträckan $21V^2/2A$ efter det först nämnda mötet.

Lösning:



Passage av x_1 vid $t=0$

x_2:

$$P: \quad x_2 = x_1 + \frac{1}{2}At_2^2 + 2V \cdot t_2$$

$$Q: \quad x_2 = x_1 + \frac{1}{2}3At_2^2 + V \cdot t_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}At_2^2 + 2V \cdot t_2 = \frac{1}{2}3At_2^2 + Vt_2 \quad \Rightarrow At_2^2 = Vt_2$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{V}{A}$$

hastigheter vid passage av x_2

$$P: V_{P2} = 2V + t_2 \cdot A = 2V + \frac{V}{A} \cdot A = 3V$$

$$Q: V_{Q2} = V + t_2 3A = V + \frac{V}{A} \cdot 3A = 4V$$

Efter passage av x_2 håller Q konstant hastighet $= 4V$
P accelereras fortfarande

x_3:

$$P: \quad x_3 = x_2 + \frac{1}{2}A(t_3 - t_2)^2 + 3V(t_3 - t_2)$$

$$Q: \quad x_3 = x_2 + 4V(t_3 - t_2)$$

$$\Rightarrow \quad (t_3 - t_2) = \frac{2V}{A}$$

1:30

En bil startas från vila och accelereras under 1,0 s med accelerationen 1,0 m/s². Därefter frikopplas motorn och bilen retarderas p g a friktion under 10 s med retardationen 5,0 cm/s². Slutligen bromsas bilen till vila under ytterligare 5,0 s. Hur långt har bilen förflyttat sig? Rita graferna för a(t), v(t) och x(t).

Lösning:

$t_0 = 0 \qquad v_0 = 0$

$x_0 \to x_1$: $a_1 = 1{,}0\, m/s^2 \qquad t_1 = 1{,}0\, s$

$$x_1 - x_0 = \frac{1}{2} a_1 \cdot t_1^2 + v_0 \cdot t_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} 1{,}0 \cdot 1{,}0^2 = \underline{\underline{0{,}5 m}}$$

$x_1 \to x_2$: $v_1 = a_1 \cdot t_1 = 1\, m/s \qquad a_2 = -5{,}0 \cdot 10^{-2}\, m/s^2$

$t_2 - t_1 = 10\, s$

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2 + v_1 \cdot (t_2 - t_1) =$$

$$= -\frac{1}{2} 5{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 = \underline{\underline{7{,}5 m}}$$

$x_3 \to x_2$: $v_2 = v_1 + a_2(t_2 - t_1) = 1 - 5{,}0 \cdot 10^{-2} \cdot 10 =$

$= 0{,}5\, m/s$

$t_3 - t_2 = 5{,}0\, s$

$v_3 = 0 = v_2 + a_3 \cdot (t_3 - t_2) =$

$= 0{,}5 + a_3 \cdot 5 \Rightarrow a_3 = -0{,}10\, m/s^2$

$$x_3 - x_2 = \frac{1}{2} a_3 \cdot (t_3 - t_2)^2 + v_2 (t_3 - t_2) =$$

$$= -\frac{1}{2} 0{,}10 \cdot 5^2 + 0{,}5 \cdot 5 =$$

$$= -1{,}25 + 2{,}5 = \underline{\underline{1{,}25 m}}$$

$$\Rightarrow x_3 - x_0 = 0{,}5 + 7{,}5 + 1{,}25 = 9{,}25\, m = \underline{\underline{9{,}2 m}}$$

1:31

En partikel rör sig längs x-axeln på ett sådant sätt att dess acceleration a är given av uttrycket a = -k x, där k är en positiv konstant. Skissera fasrumsdiagrammet. Rita in några kurvor som svarar mot olika begynnelsevärden och markera tidsriktningen med pilar på kurvorna.

I ett fasrumsdiagram avsätts $mv = p$ som funktion av x eller v som funktion av x.

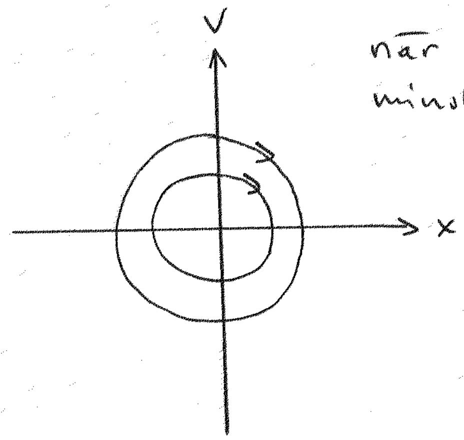
$$\ddot{x} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}v = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\cdot\frac{dv}{dx}$$

konstant

$$v\frac{dv}{dx} = -kx \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = -k\frac{x^2}{2} + E_0$$

$$\Rightarrow \frac{v^2}{2} + \frac{k}{2}x^2 = E_0 = \text{konstant}$$

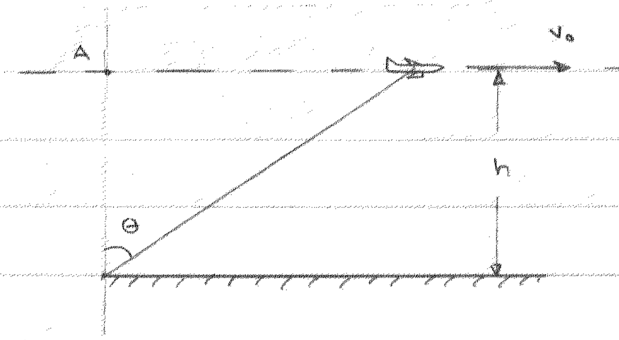


när |x| ökar minskar |v|

1:37

Ett flygplan, som följs av en radar, åker med den konstanta hastigheten v_0 i en horisontell bana på höjden h ovanför marken.

a. Finn hur vinkelhastigheten ω hos radarn varierar med vinkeln θ.
b. Finn hur vinkelhastigheten ω hos radarn varierar med tiden.
c. Finn radarns vinkelhastighet då $\theta = 60$ grader.



Givet: v_0 : konstant

h = konstant

Sökt: $\dot{\theta}(t)$, $\dot{\theta}(\theta)$

$\dot{\theta}(60^\circ)$

Lösning: randvillkor: flygplanet befinner sig vid A vid $t = 0$

$$\tan\theta = \frac{v_0 t}{h}$$

$$\frac{d}{dt}(\tan\theta) = \frac{d\theta}{dt}\frac{1}{\cos^2\theta} = \dot{\theta}\,\frac{1}{\frac{h^2}{h^2+(v_0 t)^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v_0 t}{h}\right) = \frac{v_0}{h}$$

$$\therefore\ \dot{\theta} = \frac{h^2}{h^2+v_0^2t^2}\,\frac{v_0}{h} = \boxed{\frac{h v_0}{h^2+v_0^2t^2} = \dot{\theta}(t)}$$

Om vi istället önskar uttrycka $\dot{\theta}$ som en funktion av θ stannar vi i ett tidigare stadium

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{v_0}{h} \Rightarrow \boxed{\dot{\theta}(\theta) = \frac{v_0}{h}\cdot\cos^2\theta}$$

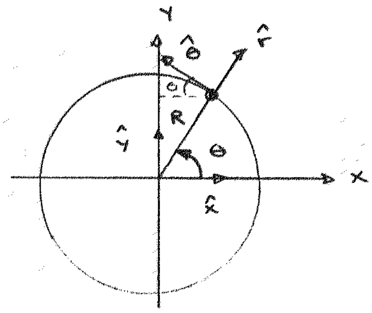
$$\dot{\theta}(60^\circ) = \frac{v_0}{h}\cdot\cos^2(60^\circ) = \frac{v_0}{h}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{v_0}{4h}}}$$

rimlighetskontroll: $\dot{\theta}(t) \to 0$ då $t \to \infty$ ty $\dfrac{h v_0}{h^2+v_0^2t^2} \to 0$

$$t \to \infty \Rightarrow \theta \to 90^\circ \Rightarrow \cos^2\theta \to 0 \Rightarrow \dot{\theta}(\theta) \to 0$$

1:39

En bil kör i en jättelik cirkelformad rondell med radien R. Polisen undersöker rörelsen från en helikopter och inför därvid ett cartesiskt och dess motsvarande polära koordinatsystem med origo i cirkelns mittpunkt. De finner att bilen rör sig med konstant vinkelacceleration α Vid $t = 0$ stod bilen still och hade (den polära vinkel)koordinaten θ_0 Beskriv å polisens vägnar den fortsatta rörelsen i såväl polära som cartesiska koordinater. Beräkna speciellt **r**, **v**, **a** (både i polära och cartesiska koordinater), **r**, θ, y, y, x, $\hat{r}$, $\hat{\theta}$, ω och r vid $t = (6\pi/\alpha)^{1/2}$ om $\theta_0 = \pi/4$.



Lösning:

$$\ddot{\theta}(t) = \alpha = \text{konstant}$$

$$\dot{\theta}(t) = \alpha t + c_1$$

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + c_1 t + c_2$$

Begynnelsevillkor: $\dot{\theta}(0) = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ $\Rightarrow$ $c_1 = 0$, $c_2 = \theta_0$

$$\therefore \quad \theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0$$

1) Cartesiska koordinater:

$$\bar{r} = R\cdot\cos\theta\,\hat{x} + R\sin\theta\,\hat{y} = R\cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right)\hat{x} + R\sin\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right)\hat{y}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = -R\dot{\theta}\sin\theta\,\hat{x} + R\dot{\theta}\cos\theta\,\hat{y} = -R\alpha t\left[\sin\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right)\hat{x} + \cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right)\hat{y}\right]$$

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = -R\dot{\theta}^2\cos\theta\,\hat{x} - R\ddot{\theta}\sin\theta\,\hat{x} - R\dot{\theta}^2\sin\theta\,\hat{y} + R\ddot{\theta}\cos\theta\,\hat{y} =$$

$$= \left[-R\alpha^2 t^2\cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right) - R\alpha\sin\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right)\right]\hat{x} +$$

$$+ \left[-R\alpha^2 t^2\sin\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right) + R\alpha\cos\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0\right)\right]\hat{y}$$

2) Polära koordinater: $\hat{r} = \cos\theta\,\hat{x} + \sin\theta\,\hat{y}$, $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\hat{y}$

$$\bar{r} = R\hat{r}$$

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = R\frac{d\hat{r}}{dt} = R\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}\,\hat{x} + \cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\hat{y}\right) = R\dot{\theta}\,\hat{\theta} = R\alpha t\,\hat{\theta}$$

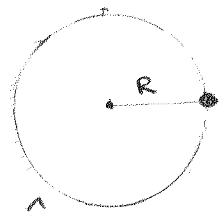
$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = R\ddot{\theta}\,\hat{\theta} + R\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} = R\alpha\,\hat{\theta} + R\alpha t\underbrace{\left(-\cos\theta\cdot\dot{\theta}\,\hat{x} - \sin\theta\cdot\dot{\theta}\,\hat{y}\right)}_{=\,-\dot{\theta}\hat{r}\,=\,-\alpha t\hat{r}} =$$

$$= R\alpha\,\hat{\theta} - R\alpha^2 t^2\,\hat{r}$$

1:41

En partikel rör sig på en cirkel så att farten v avtar enligt ekvationen $v = v0\ e^{-\alpha t}$, där v_0 och alfa är konstanter. Beräkna accelerationen uttryckt i komposanter längs basvektorerna " **r-hatt"** och **"täta-hatt"** .

Lösning: $|\bar{v}| = v = v_0 e^{-\alpha t}$



$$\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\theta}$$

Cirkelrörelse: $r = \text{konstant} = R$, $v = R\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \bar{a} = R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} = \frac{v^2}{R}\hat{r} + \frac{dv}{dt}\hat{\theta} =$$

$$= \frac{v_0^2 e^{-2\alpha t}}{R}\hat{r} - \alpha v_0 e^{-\alpha t}\hat{\theta}$$

1:42

En partikel rör sig i ett plan på ett sådant sätt att hastighetens komposanter v_r och v_θ längs basvektorerna i ett polärt koordinatsystem är lika stora. Vid t = 0 befinner sig partikeln i punkten r = a, θ = 0. Bestäm banan.

Lösning: $\bar{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} = v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}$

$$v_r = v_\theta \Rightarrow \dot{r} = r\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow r = a e^{\theta}$$