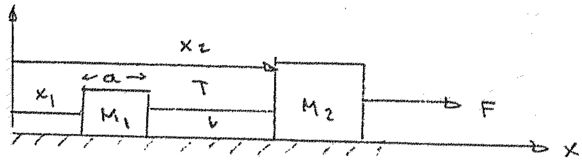
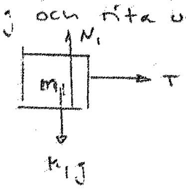
3.1

Två massor M_1 och M_2 som är belägna på en friktionsfri horisontell yta är förbundna med ett masslöst snöre. M_2 står till höger om M_1 sett från en betraktare. En horisontell kraft F appliceras på M_2 och är riktad åt höger. Bestäm systemets acceleration och spännkraften T i snöret.



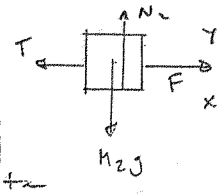
Lösning:

i) Frilägg och rita ut samtliga krafter



y: $M_1 \ddot{y} = 0 \Rightarrow N_1 = M_1 g$

x: $M_1 \ddot{x}_1 = T$ (1)



y: $N_2 = M_2 g$

x: $M_2 \ddot{x}_2 = F - T$ (2)

I x-led har vi två ekvationer om tre obekanta T, $\ddot{x}_1$ och $\ddot{x}_2$. Eftersom snöret är otänjbart har vi ytterligare en ekvation:

snörlängden (= konstant) $l = x_2 - (x_1 + a) \Rightarrow 0 = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 = a$

(1) och (2) blir nu

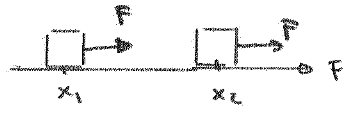
$$\left.\begin{aligned} M_1 a &= T \\ M_2 a &= F - T \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_2 a = F - (M_1 a) \Rightarrow \underline{\underline{a = \frac{F}{M_1 + M_2}}}$$

eller $M_1 \dfrac{F}{M_1 + M_2} = T \Rightarrow \underline{\underline{T = \dfrac{M_1 F}{M_1 + M_2}}}$

Räkna på egen hand

3.2
En partikel med massan 3,00 kg startar från vila och förflyttar sig 4,00 m på 2,00 s under inverkan av en enda konstant kraft. Bestäm kraftens storlek.

konst. acceleration ty F är konstant



$$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2(x_2 - x_1)}{t^2}$$

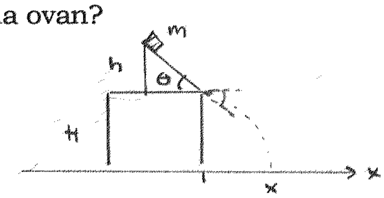
$$F = ma = \frac{m \cdot 2(x_2 - x_1)}{t^2} = \frac{3{,}00 \cdot 2 \cdot 4{,}00}{2{,}00^2}\ \text{N} = \underline{\underline{6{,}00\ \text{N}}}$$

3.3
En massa på 3,0 kg undergår en acceleration som ges av $\bar{a} = (2{,}0\,\hat{i} + 5{,}0\,\hat{j})\ \text{m/s}^2$. Bestäm den resulterande kraften såväl till belopp som riktning.

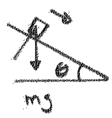
$$\bar{F} = m\bar{a} = m(a_x\hat{i} + a_y\hat{j}) = ma_x \cdot \hat{i} + ma_y\hat{j} =$$

$$= 3{,}0 \cdot 2{,}0\,\hat{i} + 3{,}0 \cdot 5{,}0\,\hat{j} = (6{,}0 \cdot \hat{i} + 15{,}0\,\hat{j})\ \text{N}$$

3.4
Ett block med massan m = 2,0 kg släpps från vila h = 0,5 m från lutande plan med kilvinkeln 30 grader som står på ett bord såsom visas i figuren. Bordet är 2,0 m högt och man kan bortse från friktion på ytan av det lutande planet.
a. Bestäm blockets acceleration när det glider utmed det lutande planet.
b. Hur stor är blockets fart när det lämnar det lutande planet?
c. Hur långt från bordet kommer det att träffa golvet?
d. Hur lång tid tar det från det att blocket släpps tills det träffar golvet?
e. Spelar det någon roll hur stor blockets massa är för beräkningarna ovan?



a)



$ma = mg \cdot \sin\theta \Rightarrow a = g \cdot \sin\theta = \frac{g}{2}$

b) $v^2 = 2a \cdot s \Rightarrow v^2 = 2 \cdot g \cdot \sin\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta} = 2gh$ (energikons. också)

c) $H = \frac{1}{2}gt^2 + v \cdot \sin\theta$ $\quad$ $x = v \cdot \cos\theta \cdot t$

d)

e) nej.

3:22

Tre partiklar med massorna 1 kg, 2 kg och 3 kg bildar ett system. I ett visst ögonblick har partiklarna hastigheterna (4, 1, 0) m/s, (2, 2, 2) m/s och (1, 2, 0) m/s.

a. Bestäm systemets rörelsemängd.

b. Endast inre krafter påverkar partiklarna. Vid ett visst senare tillfälle är de två lättare partiklarnas hastigheter (0, 0, 0) m/s respektive (5, 0, 3) m/s. Bestäm den tyngsta partikelns hastighet vid denna tidpunkt.

Lösning:

$m_1 = 1 \text{ kg} \quad , \quad \bar{v}_1 = (4,1,0) \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_1 = (4,1,0) \text{ kgm/s}$

$m_2 = 2 \text{ kg} \quad , \quad \bar{v}_2 = (2,2,2) \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_2 = (4,4,4) \text{ kgm/s}$

$m_3 = 3 \text{ kg} \quad , \quad \bar{v}_3 = (1,2,0) \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_3 = (3,6,0) \text{ kgm/s}.$

a) $\bar{P} = \sum_{i=1}^{3} \bar{p}_i = (4,1,0) + (4,4,4) + (3,6,0) = \underline{\underline{(11,11,4) \text{ kgm/s}}}$

b) Inga yttre krafter verkar $\Rightarrow$ $\bar{P}$ = konstant

$\bar{v}_1' = (0,0,0) \text{ m/s} \Rightarrow \bar{p}_1' = (0,0,0) \text{ kgm/s}$

$\bar{v}_2' = (5,0,3) \text{ m/s} \Rightarrow \bar{p}_2' = (10,0,6) \text{ kgm/s}$

$\bar{p}_1' + \bar{p}_2' = (10,0,6) \text{ kgm/s}$

$\bar{p}_1' + \bar{p}_2' + \bar{p}_3' = \bar{P} \quad \Rightarrow \quad \bar{p}_3' = \bar{P} - (\bar{p}_1' + \bar{p}_2') =$

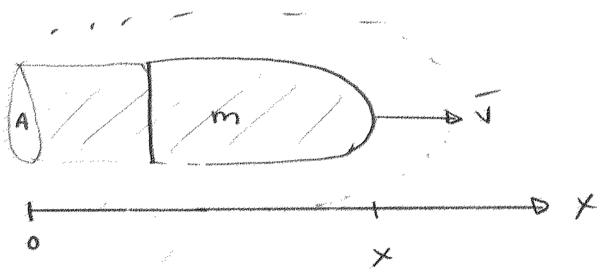
$= (11,11,4) - (10,0,6) = (1,11,-2)$

$\bar{v}_3' = \frac{\bar{p}_3'}{m_3} = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ m/s}.}}$

3:30

En trubbnosig farkost med massan m rör sig med konstant fart v_o då den kommer in i ett stoftmoln vars partiklar befinner sig i vila. Molnets densitet är rå. Stoftpartiklarna fastnar i en tunt lager på rymdfarkostens nos, som har tvärsnittsarean A vinkelrätt mot rörelseriktningen. Bestäm farkostens fart v som funktion av inträngningsdjupet x.

Lösning:



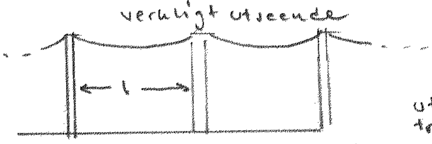
Rörelsemängden bevaras:

$$mv_o = (m + A \cdot x \cdot \rho)v$$

$$\Rightarrow v = \frac{mv_o}{m + Ax\rho}$$

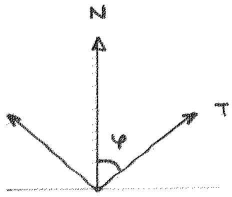
4.1

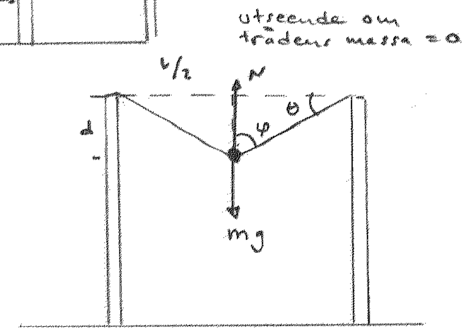
Avståndet mellan två telefonstolpar är 45 m. När en fågel som har massan 1,0 kg sätter sig telefontråden mitt emellan två stolpar sänks den 0,18 m. Bestäm spänningen i tråden om dess egen tyngd försummas.



Lösning:

$N = mg$





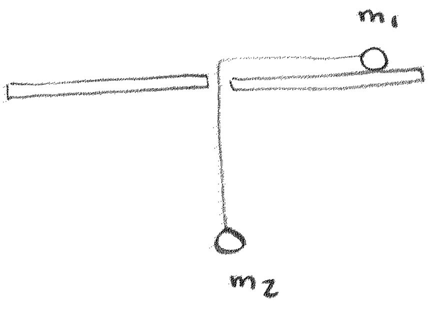
$$\left.\begin{aligned} \frac{N}{2} &= T\cdot\cos\varphi = \frac{mg}{2} \\ \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}\cdot\cos\varphi &= d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{mg}{2} = T\,\frac{d}{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + d^2}}$$

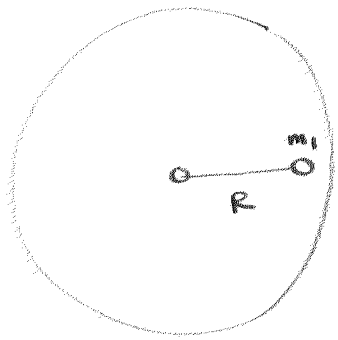
$$\Rightarrow T = \frac{mg\sqrt{(l/2)^2 + d^2}}{2\,d} = \frac{1{,}0\cdot 9{,}81\cdot\sqrt{\left(\frac{45}{2}\right)^2 + 0.18^2}}{2\cdot 0{,}18}\ N =$$

4.3

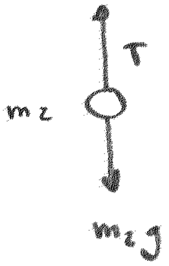
En puck med massan m_1 sitter fast i ett snöre och tillåts att beskriva en cirkelrörelse med radien R på ett friktionsfritt horisontellt bord. Snöret passerar genom ett hål i bordet och i dess andra ände sitter en kropp med massan m_2. Den nedhängande kroppen befinner sig i vila när pucken cirkulerar.

a. Hur stor är spännkraften i snöret?
b. Hur stor centralkraft verkar på pucken?
c. Hur stor är puckens fart?



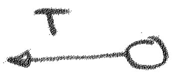


2:



$m_2 a = m_2 g - T \qquad a = 0 \quad \Rightarrow \quad T = m_2 g$

1:

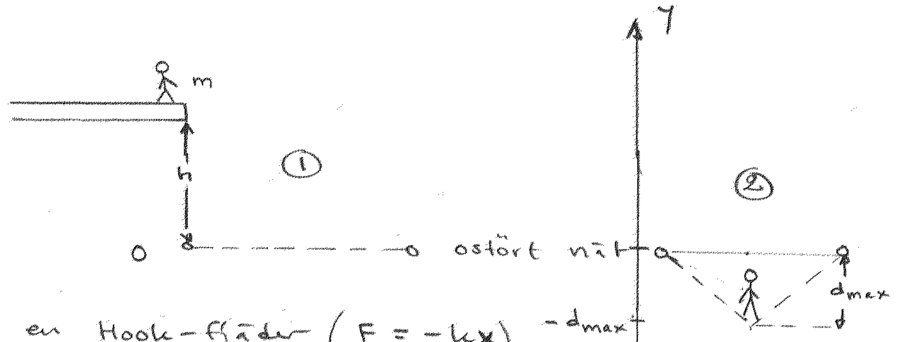


$F_c = T = \frac{m_1 v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{F_c\cdot R}{m_1}}$

4:37

Trapetsakrobater avslutar ofta sina nummer genom att hoppa från trapetsen ner i ett säkerhetsnät. När akrobaten står i vila i nätets mittpunkt trycks denna ner sträckan d_1. Man kan anta att nedtryckningen är proportionell mot den kraft varmed akrobaten påverkar nätet. Hur stor blir den största nedtryckningen, om akrobaten hoppar från höjden h över nätet?

Lösning:



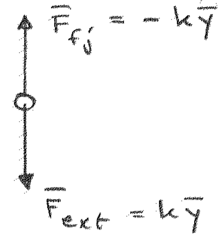
Vi betraktar nätet som en Hook-fjäder ($F_{fj} = -ky$)

Den potentiella energin i gravitationsfältet sätts exempelvis i nivå med det ostörda nätet.

Genom att betrakta nätet som en ideal fjäder kan vi utgå ifrån att den mekaniska energin bevaras.

① $E_{tot} = mgh$

② $E_{tot} = -mgd_{max} + W$ arbete vid uttänjn. av nätet. ($0 \to -d_{max}$) utr. av $F_{ext} = mg \, . = -F_{fj}$



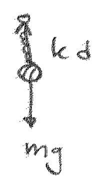
$$W = \int_0^{-d_{max}} k\bar{y} \cdot d\bar{y} = \int_0^{-d_{max}} ky\hat{y} \cdot dy\hat{y} = \int_0^{-d_{max}} ky \cdot dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2}ky^2\right]_0^{-d_{max}} = \frac{1}{2}kd_{max}^2$$

$$\Rightarrow E_{tot} = -mgd_{max} + \frac{1}{2}kd_{max}^2 = mgh$$

$$\Rightarrow d_{max}^2 - \frac{2mg}{k}d_{max} - \frac{2mg}{k}h = 0$$

men: $mg = kd_1 \Rightarrow k = \frac{mg}{d_1}$



$$\therefore \; d_{max}^2 - 2d_1d_{max} - 2d_1h = 0$$

$$\Rightarrow d_{max} = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + 2d_1h} = [d_{max} > d_1]$$

$$= d_1\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{h}{d_1}}\right)$$

med $h = 6m$, $d_1 = 1m \Rightarrow d_{max} = 4{,}6\,m$