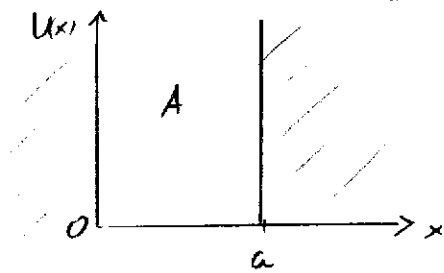


G1

Oändlig potentialbox

Givet: elektron i område A
 $a = 5.0 \text{ \AA}$

Sökt: a) Energivärden
 b) Deexcitations-tids från 2:a exc. tillståndet.

S.E: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi$ (tidsoberoende tillstånd)

I område A är $U=0$

$$\Rightarrow \psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad ; \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (1)$$

Randvillkor: $\begin{cases} \psi(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ \psi(x=a) = 0 \Rightarrow A \sin ka = 0 \end{cases}$

$A \neq 0 \Rightarrow ka = n\pi$ där $n = 1, 2, 3, \dots$

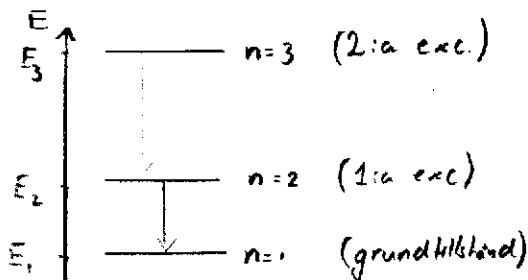
($A=0$ eller $n=0 \Rightarrow \psi(x)=0$)

Med $k_n = \frac{n\pi}{a}$ i (1) fås

$$E_n = \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{2m a^2} = \frac{n^2 h^2}{8ma^2}$$

[Notera: $E_n > 0$ men ändå bundna tillstånd ty $V=0$]

Energivärddiagram



Deexcitationer från 2:a exc tillståndet

$n=3 \rightarrow n=1$: $hf_{31} = E_3 - E_1 = (3^2 - 1^2) \frac{h^2}{8ma^2}$

$n=3 \rightarrow n=2$: $hf_{32} = (3^2 - 2^2) \frac{h^2}{8ma^2}$

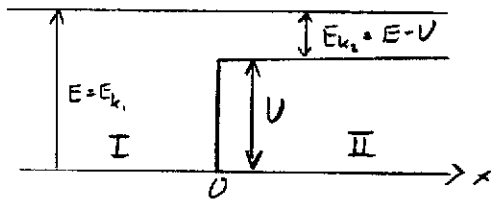
$n=2 \rightarrow n=1$: $hf_{21} = (2^2 - 1^2) \frac{h^2}{8ma^2}$

$$\Rightarrow f_{31} = \frac{h}{ma^2} = \dots = 2.9 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f_{32} = 1.8 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow f_{21} = 1.1 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

En elektronstråle infaller vinkelrätt mot ett abrupt potentialsteg.



Elektronerna har energin E . För $x < 0$ är $E = E_k$ (kinetisk energi) medan för $x > 0$ är $E_{k_2} = E - U$.

$$S.E \quad \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi = E\psi \quad \text{ge. de allmänna lösningarna}$$

$$\psi_I(x) = A e^{ik_1 x} + B e^{-ik_1 x}, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad (1a)$$

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(E-U)}{\hbar^2}} \quad (1b)$$

Notera att e^{ikx} beskriver en våg som rör sig i positiv x-led med hastighet $v_g = \frac{\hbar}{m} k$, medan e^{-ikx} beskriver motsvarande våg som rör sig i negativ x-led.

I område I har vi en inkommande våg (i positiv x-led)
och en (från potentialsteget) reflekterad våg (i negativ x-led) $\Rightarrow \begin{cases} A \neq 0 \\ B \neq 0 \end{cases}$
I område II har vi bara en transmitterad våg $\Rightarrow D = 0$

Skarvningsvillkor

Vid $x=0$ måste de två lösningarna ψ_I och ψ_{II} matcha:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A + B = C \quad (2)$$

$$\gamma_I'(0) = \gamma_{II}'(0) \Rightarrow k_1(A-B) = k_2 C \quad (3)$$

Hur stor del av vägen transmitteras?

Amplituden på den inkommande vågen = A^2 , hastigheten = $\frac{h}{m} k_1$
 " " transmitterade " = C^2 , " " " $\frac{h}{m} k_2$

Detta ger förhållandet mellan strömmarna:

$$\frac{I_t}{I_i} = \left(\frac{C^2}{A^2} \right) \frac{k_2}{k_1}$$

Från (2), (3)

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{B}{A} &= \frac{C}{A} \\ k_1 \left(1 - \frac{B}{A}\right) &= k_2 \frac{C}{A} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{C}{A} - 1 = -\frac{k_2}{k_1} \frac{C}{A} \Rightarrow \frac{C}{A} = \frac{2}{1 + \frac{k_2}{k_1}} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$\therefore \frac{I_t}{I_i} = \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

Med $I_t = 0,75 \text{ mA}$ och $I_i = 1,00 \text{ mA}$ samt (1a), (1b) fås

$$0,75 = \frac{4\sqrt{E(E-U)}}{(\sqrt{E} + \sqrt{E-U})^2} \Leftrightarrow \frac{3}{4}(E + (E-U) + 2\sqrt{E(E-U)}) = 4\sqrt{E(E-U)}$$

Flytta över och kvadrera:

$$\frac{9}{16}(E^2 + 2E(E-U) + E^2 + U^2 - 2EU) = \frac{25}{4}(E^2 - EU)$$

$$\Rightarrow U^2 + U \left(\underbrace{\frac{100}{9}E - 2E - 2E}_{= \frac{64}{9}E} \right) + \underbrace{E^2 + 2E^2 + E^2 - \frac{100}{9}E^2}_{= -\frac{64}{9}E^2} = 0$$

$$\Rightarrow U = -\frac{32}{9}E \pm \sqrt{\frac{1024}{81}E^2 + \frac{576}{81}E^2} = (-32 \pm 40) \frac{E}{9} \quad (4)$$

Notera att vi inte har antagit att $U > 0$.

a) Positivt potentialsteg $\Rightarrow U > 0 \quad (4) \Rightarrow U = \frac{8E}{9}$

Den kinetiska energin i område II fås då

$$E_{k_2} = E - U = \frac{E}{9}$$

$$E = 9,0 \text{ eV} \Rightarrow \underline{E_{k_2} = 1,0 \text{ eV}}$$

b) Negativt potentialsteg

$$(4) \Rightarrow U = -\frac{72E}{9} = -8E$$

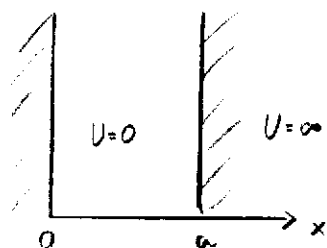
$$E_{k_2} = E - U = 9E$$

$$E = 9,0 \text{ eV} \Rightarrow \underline{E_{k_2} = 81 \text{ eV}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U = -72 \text{ eV}}}$$

G3

Oändlig potentialbox III (Klassisk/Kvant fysik)



Givet: a) $a = 4 \text{ Å}$
 $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ (elektron)

b) $a = 4 \text{ cm}$
 $m = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$

Sökt: Antal tillstånd med $E < 40 \text{ eV}$

- Lösning till S.E (från G1 och G4)

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \quad \text{och} \quad E_n = n^2 \frac{h^2}{8ma^2}$$

- Alt. Ansats $\psi(x) = A \sin \frac{n\pi x}{a}$ (uppfyller R.V.)

$$\begin{aligned} \text{S.E :} \quad & -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \left(A \sin \frac{n\pi x}{a} \right) = E \cdot A \sin \frac{n\pi x}{a} \\ & \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2ma^2} \\ & = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 A \sin \frac{n\pi x}{a} \end{aligned}$$

a) $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
 $a = 4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$

$$\Rightarrow E_n = \frac{n^2 (1,054 \cdot 10^{-34})^2 \cdot \pi^2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (4 \cdot 10^{-10})^2} \cdot \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = n^2 \cdot 2,36 \text{ eV}$$

$$E_{n_{\max}} < 40 \text{ eV} \Rightarrow n_{\max} = 4$$

Svar: 4 st

b) $m = 9,1 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$
 $a = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

$$\Rightarrow E_n = n^2 \cdot 2,36 \cdot 10^{-41} \text{ eV}$$

$$E_{n_{\max}} = n_{\max}^2 \cdot 2,36 \cdot 10^{-41} \text{ eV} < 40 \text{ eV}$$

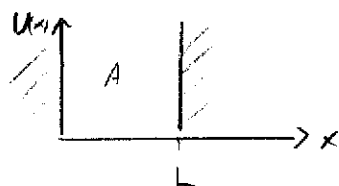
$$\Rightarrow n_{\max} < 1,3 \cdot 10^{21}$$

Svar: $1,3 \cdot 10^{21}$ st

(Tillstånden ligger väldigt
 tät $\Rightarrow$ kvantiserat $\rightarrow$ kontinuerligt)

G4

Oändlig potentialbox II



Som i uppgift G1:

$$\psi = A \sin k_n x \quad \text{där } k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \Rightarrow E_n = n^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2}$$

Så att finna partikeln i ett infinitesimalt område $[x, x+dx]$:

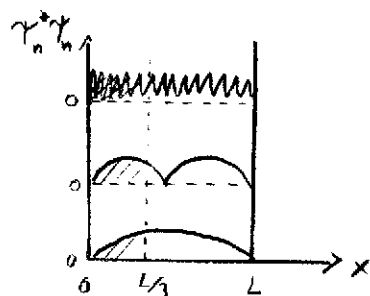
$$dP = \underbrace{\psi^* \psi}_{\text{slh-täthet}} dx = A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx$$

Normalisering: så att finna partikeln någonstans måste vara 1

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \psi dx = \left\{ \begin{array}{l} \psi \neq 0 \text{ endast} \\ \text{på } [0, L] \end{array} \right\} = \int_0^L A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = A^2 \int_0^L \frac{1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}}{2} dx$$

$$= A^2 \cdot \frac{1}{2} L$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$



$$\therefore \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\begin{aligned} \text{Sökt: } P(0, L/3) &= \int_0^{L/3} \psi^* \psi dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/3} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/3} \frac{1 - \cos \frac{2n\pi x}{L}}{2} dx = \\ &= \frac{1}{L} \left[x - \frac{\sin \frac{2n\pi x}{L}}{2n\pi/L} \right]_0^{L/3} = \frac{1}{L} \left(\frac{L}{3} - \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi \cdot L}{L \cdot 3} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n\pi} \sin \frac{2}{3} n\pi \end{aligned}$$

a) I grundtillståndet ($n=1$) $\Rightarrow P(0, L/3) = 0,196$

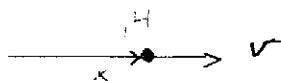
b) 1:a exc. tillståndet ($n=2$) $\Rightarrow P(0, L/3) = 0,402$

c) Mkt högt exciterat tillstånd ($n \rightarrow \infty$) $\Rightarrow P(0, L/3) \rightarrow \frac{1}{3}$

d) Klassiskt. Ej längre kvantiserade tillstånd.
 Ekvivalensprincipen. Låt $L \rightarrow \infty$ (makroskopiska objekt)
 Kan ej skilja mellan olika våglängder $\Rightarrow \lambda \rightarrow 0 \Rightarrow P = \frac{1}{3}$

G6

Heisenbergs osäkerhetsrelation



Känt: $\bar{v} = 1840 \text{ m/s}$

$\Delta v = 4 \text{ m/s}$

Sökt: Δx

Använd Heisenbergs osäkerhetsrelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2} = \frac{h}{4\pi}$$

$$p = m \cdot v$$

Antag att m är välbestämt

$$\Delta p = m \Delta v$$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \frac{h}{4\pi m \Delta v} = \left\{ m(^1\text{H}) = M_p \approx 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \right\} \approx 8 \cdot 10^{-9} \text{ (m)}$$

$$\therefore \Delta x \sim 10^{-8} \text{ m}$$