

Q2

2D-fr: elektrongas

Givet: $N_0 = 6,0 \cdot 10^{18} \text{ e}^-$ på en yta $1,0 \times 1,0 \text{ m}^2$

Fr: elektrongas : 2D

Sökt: # e^- med $E_k \leq 0,5 \text{ eV}$ Lösning

Energitillstånd för en partikel i 2D-potentialbox

$$E_{n_x, n_y} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e L^2} (n_x^2 + n_y^2)$$

Från förel. får vi antalet möjliga tillstånd/areaenhet med en energi i intervallet $[E, E+dE]$

$$g(E) dE = 2 \cdot \frac{2\pi}{h^2} m_e dE = C \cdot dE$$

[OBS! Varje energitillstånd kan rymma 2 elektroner, en med spin upp och en med spin ner.]

Elektronerna är Fermifördelade:

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} \quad (\text{Så att finna en } \text{e}^- \text{ i ett tillstånd med energi } E)$$

 $\Rightarrow$ # e^- /areaenhet med energi mellan $E, E+dE$:

$$N(E) dE = f(E) g(E) dE$$

$$\text{O} \approx T = 0 \text{ K} \Rightarrow f(E) = \begin{cases} 1 & \text{om } E \leq E_F \\ 0 & \text{om } E > E_F \end{cases}$$

[Alltså om $E_F \leq 0,5 \text{ eV}$ så skulle alla e^- ha $E_k \leq 0,5 \text{ eV}$]Fermienergin:

$$N_0 = L^2 \int_0^{E_F} N(E) dE = \{T=0\text{K}\} = L^2 C \int_0^{E_F} dE = \frac{L^2 4\pi}{h^2} m_e E_F \Rightarrow E_F = 1,44 \text{ eV}$$

Hur många e^- har $E_k \leq 0,5 \text{ eV} = E_1$ (OBS $V=0 \Rightarrow E=E_k$)

$$N = L^2 \int_0^{E_1} N(E) dE = \{T=0\text{K}\} = \frac{L^2 4\pi}{h^2} m_e E_1$$

$$\Rightarrow \frac{N}{N_0} = \frac{E_1}{E_F} \approx 0,35$$

Svar: 35%

Q4

Kinetisk medelenergi:Givet: Guld ($E_F = 6 \text{ eV}$) vid $T = 0 \text{ K}$

Sökt: Kinetisk medelenergi i Guld samt i Maxwell-Boltzmann-fördelad gas.

LösningBetrakta e^- i Au som en fri elektrongas. ($F=0 \Rightarrow V=0 \Rightarrow E=E_k$)Så, att finna en elektron i ett tillstånd med energi E ges av

Fermi-Dirac-fördelningsfunktionen

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

 $\Rightarrow$ tillåtna tillstånd mellan $E, E+dE$ / volymenhet ges av

$$g(E)dE, \text{ där } g(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3} E^{1/2} = CE^{1/2} \quad \text{tillståndstätt}$$

 $\Rightarrow$ # e^- med energi mellan $E, E+dE$ / volymenhet

$$N(E)dE = f(E)g(E)dE$$

047 forts

Medelenergin

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{N_0} E_i}{N_0} = \frac{V \int_0^{\infty} E N(E) dE}{V \int_0^{\infty} N(E) dE}$$

Vid $T=0$ gäller $f(E) = \begin{cases} 1 & \text{då } E \leq E_F \\ 0 & \text{då } E > E_F \end{cases}$

$$\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_F} C E^{1/2} E dE}{\int_0^{E_F} C E^{1/2} dE} = \frac{\frac{2}{3} E_F^3}{\frac{2}{3} E_F^2} = \frac{3}{5} E_F \quad (1)$$

För en Maxwell-Boltzmann fördelad 3D-gas gäller

$$f(E) = C_1 e^{-E/k_B T}, \quad g(E) = C_2 E^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\# \text{ partiklar}}{\text{volymenhet}} \text{ med energi mellan } E, E+dE$$

$$N(E) dE = g(E) f(E) dE$$

Medelenergin:

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{\infty} E N(E) dE}{\int_0^{\infty} N(E) dE} = \frac{\int_0^{\infty} E^{3/2} e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^{\infty} E^{1/2} e^{-E/k_B T} dE} = \frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(3/2)} = \frac{k_B T^{5/2} \frac{3}{4} \sqrt{\pi}}{k_B T^{3/2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}} = \frac{3}{2} k_B T \quad (2)$$

$$(1) = (2) \text{ ger}$$

$$T = \frac{2E_F}{5k_B} = \dots = 2,8 \cdot 10^4 \text{ K}$$

Q5

Na-kristall

Givet : $\rho_{Na} = 0,98 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

$M_{Na} = 23u \Rightarrow 23 \text{ g/mol}$

1 Na-atom $\Rightarrow$ 1 ledningselektron

Sökt : a/ konc. av ledningselektroner
b/ Fermienergin

Lösning

a/
$$\frac{\# \text{ Na-atomer}}{\text{Volymenhet}} = \frac{\rho_{Na}}{M_{Na}/N_A} = \frac{0,98 \cdot 10^3 \cdot 6,022 \cdot 10^{23}}{23 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{\text{atomer}}{\text{m}^3} \right) \approx 2,6 \cdot 10^{28} \frac{\text{atomer}}{\text{m}^3}$$

$\swarrow$ g/atom

Svar: $2,6 \cdot 10^{28} \frac{\text{lednings-e}^-}{\text{m}^3}$

b/ Betrakta e^- som en fri gas. Tillståndstätheten ges då av

$$g(E) = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3} E^{1/2}$$

$\Rightarrow$ # tillgängliga tillstånd mellan $E, E+dE$ / volymenhet $= g(E)dE$

Slh att finna en e^- i ett tillstånd med energi E ges av

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

för $T=0$ gäller $f(E) = \begin{cases} 1 & E \leq E_F \\ 0 & E > E_F \end{cases}$

$\Rightarrow$ Antal e^- med energi mellan $E, E+dE$ / volymenhet $= f(E)g(E)dE$

$\therefore$ Totalt # e^- / volymenhet :

$$\begin{aligned} n &= \int_0^\infty f(E)g(E)dE = \left\{ \begin{matrix} \text{S\ddot{a}H.} \\ T=0K \end{matrix} \right\} = \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3} \int_0^{E_F} E^{1/2} dE = \\ &= \frac{8\sqrt{2}\pi m_e^{3/2}}{h^3} \frac{2}{3} E_F^{3/2} \end{aligned}$$

Med n från a-uppgiften fås

$E_F \approx 3,2 \text{ eV}$

Q8

3D - Potentiellåda

- a/ 1 elektron i låda med kantlängd $L = 3,0 \text{ nm}$
 b/ N_0 elektroner ——— " ——— $L = 3,0 \text{ nm}$

Sökt: minsta exc. energi

Sökt: N_0

Lösning

- a/ Elektronen beskrivs av vågfunktionen

$$\Psi(x, y, z) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z)$$

$$\text{där } \begin{cases} k_x = \frac{n_x \pi}{L} & n_x = 1, 2, \dots \\ 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\text{Energin } E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

$$\text{Grundtillet: } n_x = n_y = n_z = 1$$

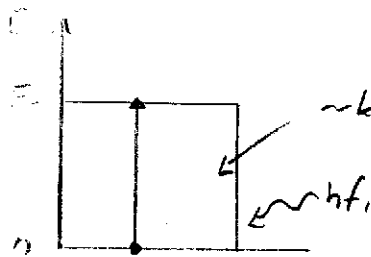
$$1:a \text{ exc: } n_x = n_y = 1, n_z = 2$$

För att en foton skall absorberas av elektronen (i grundtillet) krävs minst energin

$$hf_i = \Delta E = E_{112} - E_{111} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} (6 - 3) = \dots = 12,6 \text{ eV}$$

- b/
- $L = 3,0 \text{ nm}$
- ,
- N_0
- elektroner

Vi vill kunna excitera 1 elektron i högsta energitillståndet med samma foton som ovan



~kontinuerligt. Vid $T=0$ är alla tillstånd upptagna tom E_F
 dvs första lediga tillstånd finns vid $E = E_F$

$\therefore$ Vi måste ha $hf_i \geq E_F$

Fermienergin för en potentialbox ges av (43.25)

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}, \text{ där } n = \frac{N_0}{L^3} \quad e^- \text{ täthet}$$

$$\Rightarrow N_0 \leq \frac{8\pi L^3}{3} \left(\frac{2m}{\hbar^2} hf_i \right)^{3/2} \approx 5,4 \cdot 10^{24} \text{ st}$$