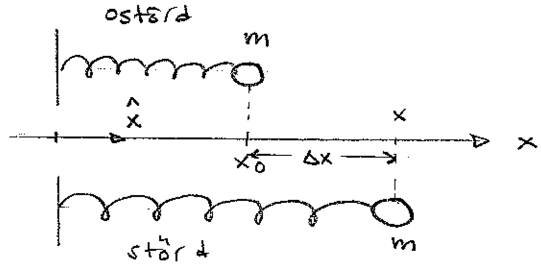
Föreläsning.

Svängningar : ex. fjädrar, pendlar, molekyler, växelström, ljus.

Harmoniska svängningar

Det finns många exempel på fysikaliska förutsättningar som ger harmoniska svängningar. Här väljer vi ett bekant fall: Hookfjädern.



fjäderkraften $F \sim \Delta x$

$$\bar{F} = -k(x - x_0)\,\hat{x}$$

med $x_0 = 0$: $\bar{F} = -kx\,\hat{x}$

Om partikeln m utsätts för en fjäderkraft $\bar{F}$ kommer den accelereras enl. Newtons 2:a lag:

$$\bar{F} = -kx\,\hat{x} = m\frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{x}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$ diff.ekv. för harm. svängn.

$$\Rightarrow x(t) = A\cdot\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \phi\right]$$ A och ϕ är konstanter.

konstanten $\sqrt{\frac{k}{m}}$ anger hur snabbt $x(t)$ varierar i tiden. (vinkelfrekvens)

Bl.a. av skrivtekniska skäl definierar vi ω enligt $\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\Rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

A = amplituden = maximal avvikelse från jämviktsläget x_0

ϕ = faskonstant beror av läge och hastighet vid $t=0$.

Hur lång tid tar en cykel av svängningen?

$$\omega t + \phi + 2\pi = \omega(t+T) + \phi$$

$$\Rightarrow \omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$ = svängningstiden.

f = frekvensen = antal svängningscykler per sekund

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$ el. $\omega = 2\pi f$. ω, T o f oberoende av A.

hastighet: $v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \cdot \sin(\omega t + \phi)$

acceleration: $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$

$v_{max} = \omega A$, $a_{max} = \omega^2 A$.

ex. a) sätt $t=0$ då partikeln passerar jämviktsläget och är på väg i positiv x-riktning.

$x = 0$ då $t=0$ $\Rightarrow A \cdot \cos(0 + \phi) = 0$

$\Rightarrow \phi = \pi/2$ el. $-\pi/2$

$v > 0$ ger $\phi = -\pi/2$

$\therefore x(t) = A \cdot \cos(\omega t - \pi/2) = A \cdot \sin \omega t$

$t=0$: $x=0$, $v = v_{max}$, $a = 0$

b) sätt $t=0$ då partikeln befinner sig i $X = A$

$\Rightarrow x(t) = A \cdot \cos \omega t$

$v(t) = -\omega A \cdot \sin \omega t$

$a(t) = -\omega^2 A \cdot \cos \omega t$

Allmänt: vid $t=0$ $x_i = A \cdot \cos \phi$

$v_i = -\omega A \cdot \sin \phi$

$\Rightarrow \tan \phi = -\frac{v_i}{\omega x_i}$

dessutom:

$x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega}\right)^2 = A^2 \cos^2 \phi + A^2 \cdot \sin^2 \phi$

$\Rightarrow A = \sqrt{x_i^2 + \left(\frac{v_i}{\omega}\right)^2}$

Energi:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow m\omega^2 = k$$

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \left[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi) \right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} k A^2}} = \text{konstant} \ (\text{ober. av } t)$$

Svängningar (forts)

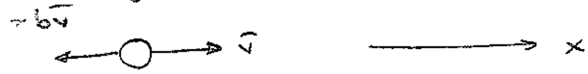
För en odämpad fri svängning kan vi skriva

$m\ddot{x} = -kx$

$$\Rightarrow \quad x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

↑ faskonstant

Om vi inför dämpning blir differentialekvationen mer komplicerad. Om dämpningen orsakas av viskositeten hos mediet som rörelsen äger rum i (luft, vatten, glycerin ...) kommer den dämpande kraften (om hastigheten inte är alltför hög, ingen turbulens) att vara proportionell mot hastigheten och motriktad denna. Fjädersvängning i dämpande medium:



Newtons andra lag:

$$\Sigma F_x = -kx - bv = ma_x$$

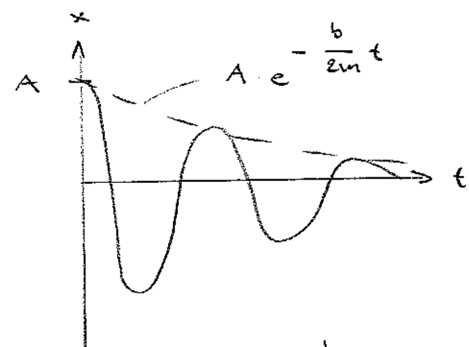
$$\Rightarrow \quad m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = A \cdot e^{-\frac{b}{2m}\cdot t} \cos(\omega t + \phi)$$

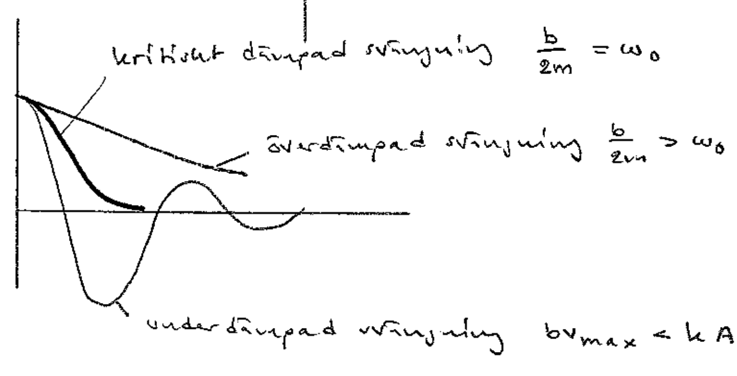
där

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ = egenfrekvensen hos den odämpade svängningen.



Genom att variera konstanten b kan dämpningen bli olika stark



Tvungna svängningar

Om vi tillför energi till den dämpade svängningen med hjälp av en extern kraft $F_{ext} \cdot \cos \omega t$ får vi en differentialekv. enligt

$$F_{ext} \cdot \cos \omega t - kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

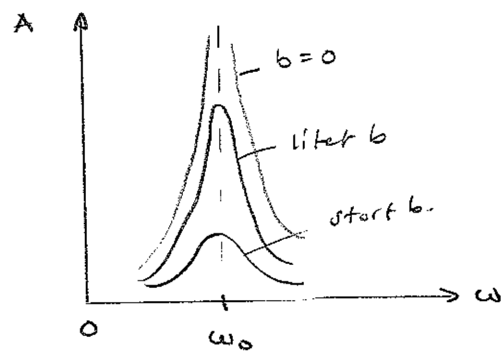
Om vi väntar tillräckligt länge ($t \to \infty$) får vi

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

där

$$A = \frac{F_{ext}/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

notera att svängningsfrekvensen ω blir densamma som frekvensen hos den externa kraften.



Klassisk vågfysik

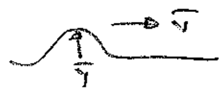
I vågrörelseläran behandlas fenomen som är gemensamma för olika typer av vågrörelser: ljud, ljus, mekaniska, röntgen, radio, IR ...

I kvantfysiken utnyttjar vi resultat från denna behandling.

En vågrörelse innebär att en störning $\bar{y}$ fortplantas i ett medium (ljus i vakuum) med en utbredningshastighet $\bar{v}$ (fashastighet)

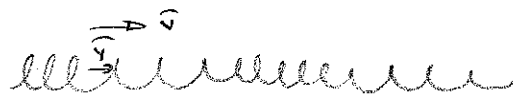
Två kombinationer av störningsvektor $\bar{y}$ och hastighet:

1) Transversell våg: $\bar{y} \perp \bar{v}$ ex. puls på sträng (snöre)



el. magn. vågor

2) Longitudinell våg $\bar{y} \parallel \bar{v}$ ex. puls i en fjäder

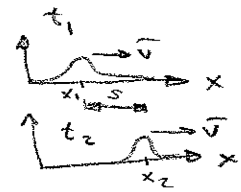


ljudvågor

Vattenvågor uppvisar en kombination av transversella och longitudinella vågor (Tänk hänvisn. i Serway sid 489)

I det matematiska uttrycket som beskriver en våg innehåller såväl rums- som tidskoordinat.

$$y = f(x, t)$$



$(x_2 - x_1) = v(t_2 - t_1)$

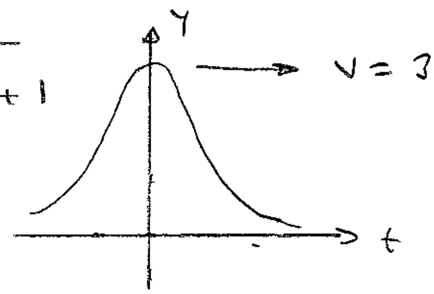
För våg som utbreder sig i positiv x-led

$$y = f(x - vt)$$

—— " —— negativ x-led

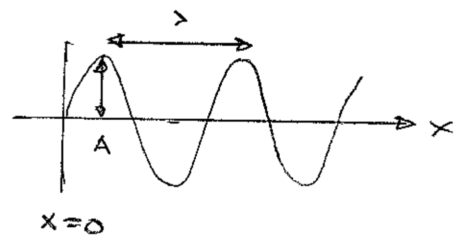
$$y = f(x + vt)$$

ex. $y(x,t) = \dfrac{2}{(x-3{,}0t)^2+1}$ (cm, s)



<u>Harmoniska vågor.</u> funktionen f: sin el cos.

period i rummet: våglängd λ (kamera)
period i tiden: period T (stoppur)



Allmänt $y(x,t) = A \cdot \sin[a(x-vt)]$

studera vågen vid $t=0$.

$$\Rightarrow y(x,0) = A \cdot \sin[a(x)]$$

sätt $y(0,0)=0$ (se figuren ovan)

$$\Rightarrow y\left(\frac{\lambda}{2},0\right)=0 \Rightarrow A \cdot \sin a\frac{\lambda}{2} = 0 \Rightarrow a\frac{\lambda}{2} = \pi$$

cirkulära vågtalet

$$\Rightarrow a = \frac{2\pi}{\lambda} \equiv k$$

$$\therefore \boxed{y(x,t) = A \cdot \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right]}$$

Vågen utbreder sig sträckan λ på tiden T

$$\Rightarrow v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\Rightarrow y(x,t) = A \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda}{T}t\right)\right] =$$

$$= A \cdot \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$\Rightarrow \quad y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$

faskonstant

mer allmänt

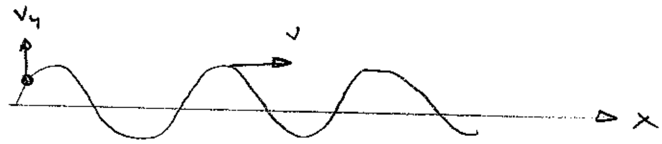
$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \phi)$$

med $\phi = \pi$ får

$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t + \pi) =$$
$$= A(-\sin(kx - \omega t)) =$$
$$= A \cdot \sin(\omega t - kx)$$

<u>Vågutbredning på en sträng</u>:

två typer av hastigheter



$$y(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

En punkt på strängen åker upp och ner. v_y och a_y

$$v_y = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{x = konst} = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$a_y = \left.\frac{dv_y}{dt}\right|_{x = konst} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\omega^2 A \cdot \sin(kx - \omega t)$$

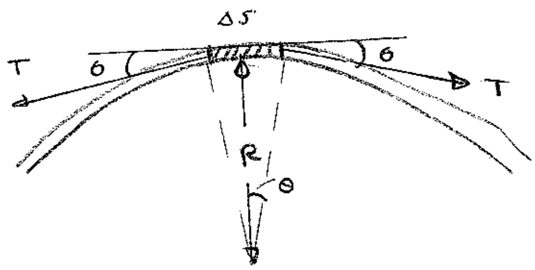
$\Rightarrow \quad v_{y,max} = \omega A \quad , \quad a_{y,max} = \omega^2 A ,$

v_y och a_y beror av amplitud och vinkelfrekvens

Vad bestämmer utbredningshastigheten v?

mekaniskt exempel

spännkraft i strängen T



radiell (netto) kraft på strängelementet Δs.

$F_r = 2T \cdot \sin\theta \approx 2T\theta$ $\sin\theta \approx \theta$ (små vinklar)

$m = \mu \cdot \Delta s$ μ : massa per längdenhet (kg/m)

$m = \mu \cdot \Delta s = \mu\,(R\,\theta) \cdot 2 = 2\mu R\theta$

$$F_r = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow 2T\theta = \frac{2\mu R\theta v^2}{R} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

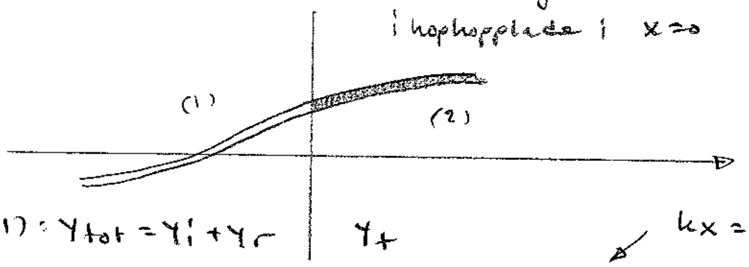
För andra vågtyper fås liknande uttryck.

Reflexion och transmission av transversell våg på en sträng.

Två strängar (1) och (2) ihopkopplade i $x=0$

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\omega}{k} \quad \Rightarrow k = \frac{\omega}{v}$$



$$kx = \frac{\omega}{v} \cdot x$$

Infallande våg: $\quad y_i = A_i \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_1}\right)$

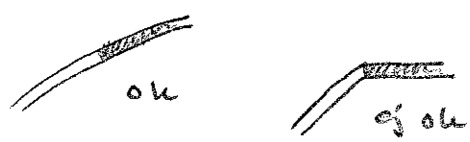
reflekterad våg: $\quad y_r = A_r \cdot \sin \omega \left(t + \frac{x}{v_1}\right)$

transmitterad våg: $\quad y_t = A_t \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_2}\right)$

I $x=0$ gäller: $\quad y_i + y_r = y_t \quad \Rightarrow \boxed{A_i + A_r = A_t}$

spännkraften är riktad längs strängen

inga knyckar på strängen



$\Rightarrow$ derivatan av störningen måste vara kontinuerlig.

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(y_i + y_r) = \frac{d}{dx} y_t$$

$x=0$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{v_1}(A_i - A_r) = \frac{1}{v_2} A_t}$$

$$A_t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} A_i$$

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} A_i$$

men $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

$$\Rightarrow \quad A_t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} A_i = q_1 \cdot A_i$$

samt

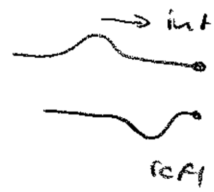
$$A_r = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = q_2 \cdot A_i$$

q_1 alltid > 0

men om $\mu_1 < \mu_2 \Rightarrow q_2 < 0$

∴ den reflekterande vågen är ; motfas till den infallande

vi generaliserar (vilt) detta till :



$\boxed{\text{Fassprång på } \pi \text{ radianer vid reflexion mot tätare medium}}$

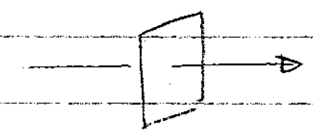
här betyder tätare medium större massa per längdenhet.

För ljus betyder tätare medium större värde på brytningsindex.

Intensitet.

I en vågrörelse fortplantar sig energi och rörelsemängd.

Intensiteten = effekten som passerar per ytenhet av en yta $\perp$ mot utbredningsriktningen (W/m^2)



Vågrörelsen innehåller energitätheten w (J/m^3)

Utbredningshastighet: v

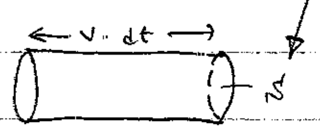
$$\Rightarrow I = v \cdot w$$

om $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

$$\Rightarrow I \sim \xi_0^2$$

$$\boxed{\text{Intensiteten är prop. mot (amplitud)}^2}$$



$$dE = w \cdot (v \cdot dt)\, S$$

$$I = \frac{dE}{dt} \frac{1}{S} = w \cdot v$$

Vi har härlett $I \sim \xi_0^2$ för ett speciellt fall men drar oss nu inte för att tillämpa det på alla typer av vågor.